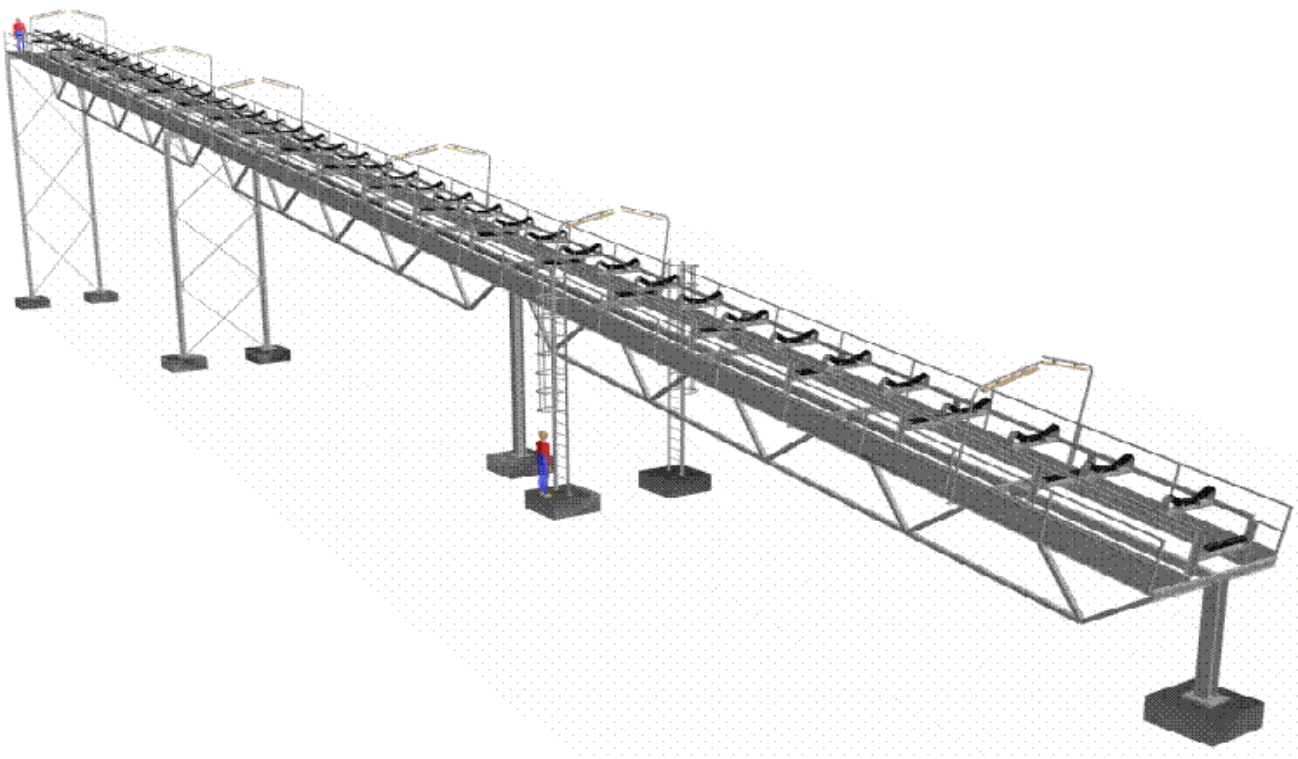

CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ



(LECCIÓN)

CONCEPTOS E HIPÓTESIS BÁSICAS



COMPORTAMIENTO LINEAL:
DE LA ESTRUCTURA Y MATERIALES

MOVIMIENTOS PEQUEÑOS
COMPARADOS CON LAS DIMENSIONES DE LA
ESTRUCTURA

SE DESPRECIAN LOS FENÓMENOS
QUE AFECTAN Y VARÍAN LA RIGIDEZ.

MATERIALES HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS

RELACIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO ESTRUCTURAL

1ª RF.

LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.
($\sum F=0$, $\sum M=0$).

Dentro de la estructura, en cualquier elemento, sección, nudo, barra, conjunto, y con las cargas exteriores.

2ª RF.

LAS ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE MOVIMIENTOS.

Entre los elementos de la estructura y con las condiciones de contorno; así, por ejemplo; en uniones rígidas tendremos los ángulos y movimientos solidarios; en uniones articuladas tan solo los movimientos serán solidarios.

3ª RF.

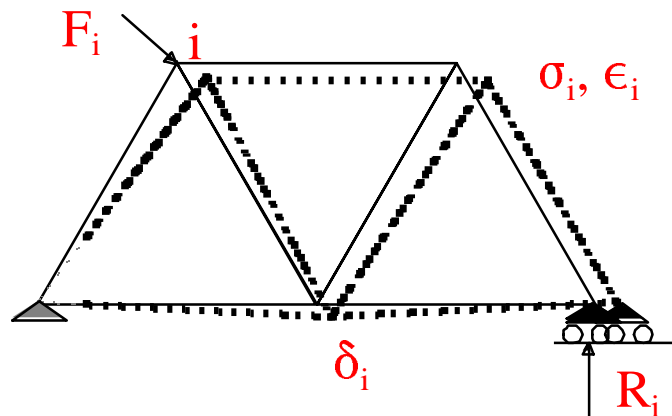
LA LEY DE COMPORTAMIENTO.

Que relaciona las tensiones con las deformaciones (leyes de Hooke, ecuaciones de Lamé,...).

MÉTODO DE LA RIGIDEZ

≡

MÉTODO DE EQUILIBRIO



- δ_i = vector desplazamientos y giros de nudos.
- σ_i, ϵ_i = vectores esfuerzos y deformación de barras.
- F_i = vector cargas externas.
- R_i = vector de ligaduras liberadas (internas y externas).

Compatibilidad.

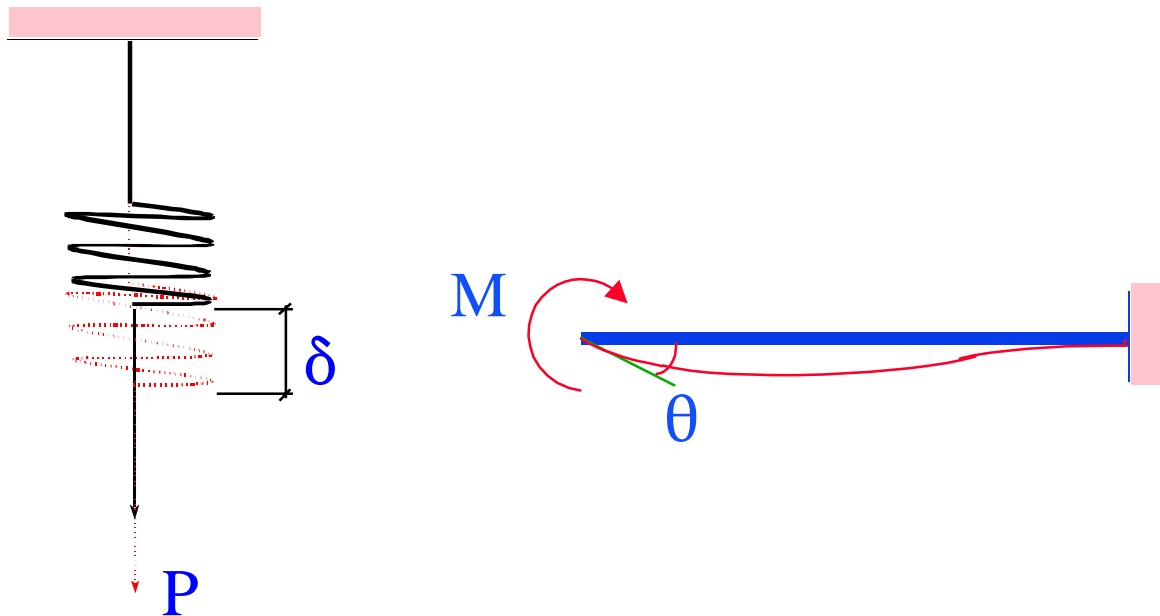
$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_i = f_1(\delta_i) \\ \sigma_i = f_3(\delta_i) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ (R_i, F_i) = f_5(\delta_i) \Rightarrow \end{array} \right\}$$

Comportamiento.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_i = f_2(\epsilon_i) \\ (R_i, F_i) = f_4(\sigma_i) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Equilibrio.} \\ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f_5(\delta_i) = (R_i, F_i) = (F_i, \text{valor conocido}) \rightarrow \delta_i, R_i \rightarrow \epsilon_i \rightarrow \sigma_i$$

COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD



$$P = K \cdot \delta$$

[1]

$$M = K \cdot \theta$$

[3]

$$\delta = \frac{P}{K} = \frac{1}{K} \cdot P = a \cdot P$$

[2]

$$\theta = \frac{M}{K} = \frac{1}{K} \cdot M = a \cdot M$$

[4]

Si en [1] o [3] hacemos el alargamiento o giro, respectivamente, unidad:

$$\delta = 1 \Rightarrow P = K$$

$$\theta = 1 \Rightarrow M = K$$

RIGIDEZ

Fuerza o par, que aparece ante un alargamiento o giro unitario

Si en [2] o [4] hacemos la fuerza o momento, respectivamente, unidad:

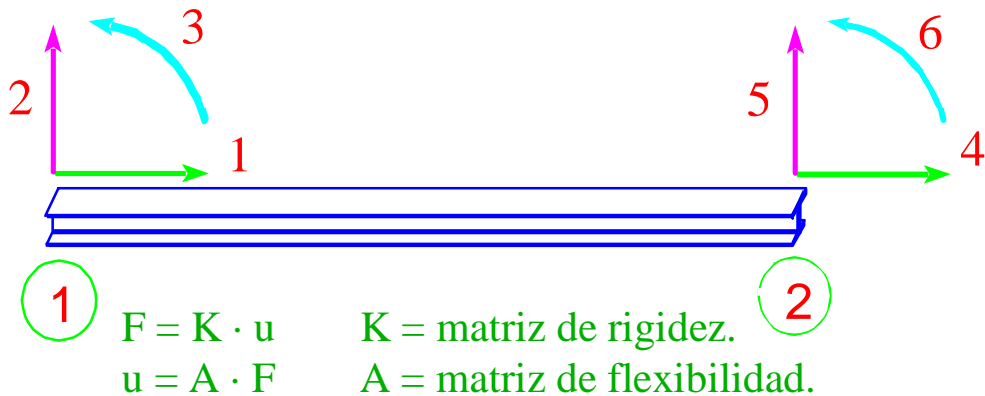
$$P = 1 \Rightarrow \delta = a$$

$$M = 1 \Rightarrow \theta = a$$

FLEXIBILIDAD

Alargamiento o giro producido por una fuerza o par unidad

COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD



El coeficiente de rigidez, k_{rs} , que relaciona las coordenadas “r” y “s”, es la fuerza que aparece en la coordenada “r” al dar un movimiento exclusivo y unitario en la coordenada “s”, manteniendo nulos todos los demás ($u_s=1$; $u_j=0$ para $j \neq s$).

El coeficiente de flexibilidad, a_{rs} , que relaciona las coordenadas “r” y “s”, es el movimiento que aparece en la coordenada “r” debido a una fuerza exclusiva y unitaria en la coordenada “s”, manteniendo nulos todos los demás ($F_s=1$; $F_j=0$ para $j \neq s$).

$$F_r = k_{rs_1} \cdot u_1 + k_{rs_2} \cdot u_2 + k_{rs_3} \cdot u_3 + \dots + k_{rs_i} \cdot u_i,$$

Matricialmente.

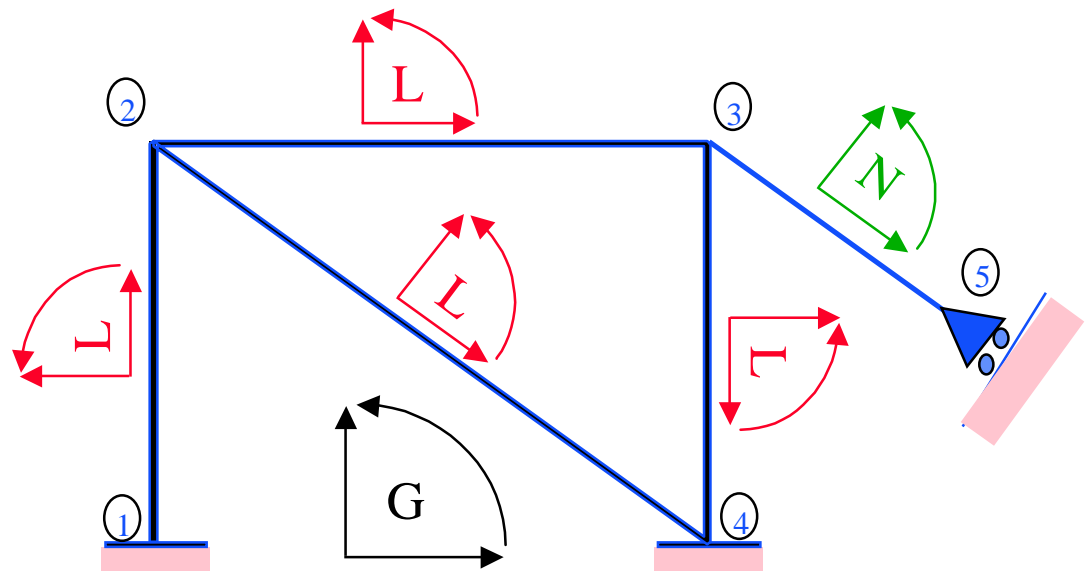
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$[F] = [K] \cdot [\Delta]$$

SISTEMAS DE COORDENADAS; DISCRETIZACIÓN

Sistema de referencia

Es un sistema cartesiano que permite la definición geométrica de la estructura (coordenadas de los nudos, longitudes de los elementos, etc).



DISCRETIZACIÓN

Proceso de disociar la estructura en elementos (unidos en los nodos)

Sistema local

En cada barra o elemento de la estructura definiremos un sistema local, al que referiremos los movimientos y fuerzas de cada barra.

Sistema global

Puesto que en el proceso de discretización de la estructura se ha supuesto ésta formada por un conjunto de elementos y nodos, será preciso definir un sistema único, global, que permita referir a él de forma única y para toda la estructura los movimientos y fuerzas de los nodos.

Sistema nodal

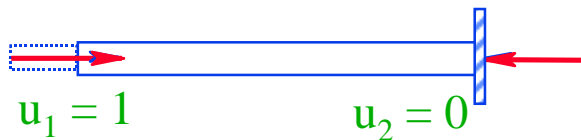
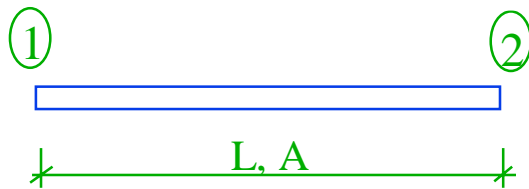
A veces, para facilitar ciertas condiciones de contorno (caso de un patín,) será conveniente definir un sistema nodal de coordenadas, distinto del global, operando conjuntamente con ambos.

RIGIDECES DE BARRAS ELEMENTALES

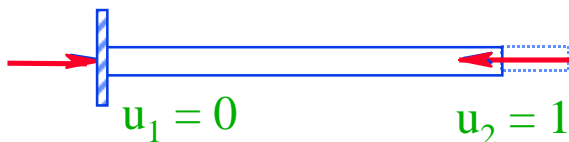
1).- BARRA DE CELOSÍA, ESTRUCTURAS PLANAS (CERCHAS)

LEY DE HOOKE: $\Delta L = \frac{L F}{A E}$ $F = \frac{A E}{L} (\Delta L = 1)$

K



$$k_{11} = \frac{A E}{L} \quad k_{21} = -\frac{A E}{L}$$



$$k_{12} = -\frac{A E}{L} \quad k_{22} = \frac{A E}{L}$$

Generalizando para ambos nudos.

$$F_1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot u_2$$

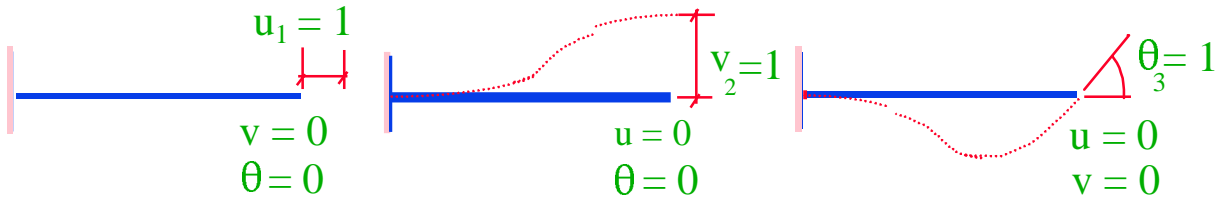
$$F_2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot u_2$$

En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot E / L & - A \cdot E / L \\ - A \cdot E / L & A \cdot E / L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[F] = [K] \cdot [\delta]$$

2).- BARRA EN VOLADIZO



$$N = k_{11} = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$N = k_{12} = 0$$

$$N = k_{13} = 0$$

$$V = k_{21} = 0$$

$$V = k_{22} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$V = k_{23} = - \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$M = k_{31} = 0$$

$$M = k_{32} = - \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$M = k_{33} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} N \\ V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

3].- BARRA DE ESTRUCTURA PLANA (INEXTENSIBLE)



Movimiento unitario vertical en nodo ① :

$$\mu_2 = \mu_4 = \frac{6EI (v_1=1)}{L^2} = \frac{6EI}{L^2} = k_{21} = k_{41}$$

$$V_1 = \frac{\mu_2 + \mu_4}{L} = \frac{12EI}{L^3} = k_{11}$$

$$V_3 = -V_1 = -\frac{12EI}{L^3} = k_{31}$$

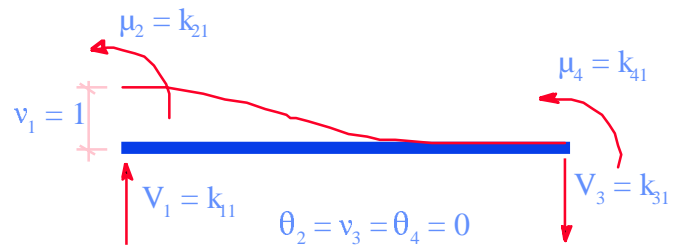


Fig. 1

Giro unitario en nodo ① :

$$\mu_2 = k_{22} = \frac{4EI}{L} ; \mu_4 = \beta \cdot M_2 = \frac{2EI}{L} = k_{42}$$

$$V_1 = \frac{\mu_2 + \mu_4}{L} = \frac{6EI}{L^2} = k_{12}$$

$$V_3 = -V_1 = -\frac{6EI}{L^2} = k_{32}$$

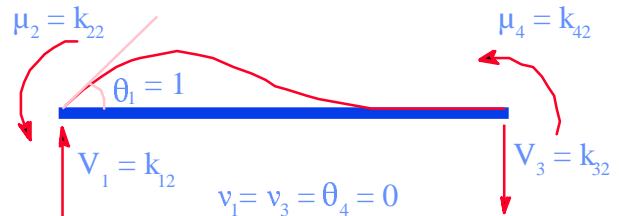
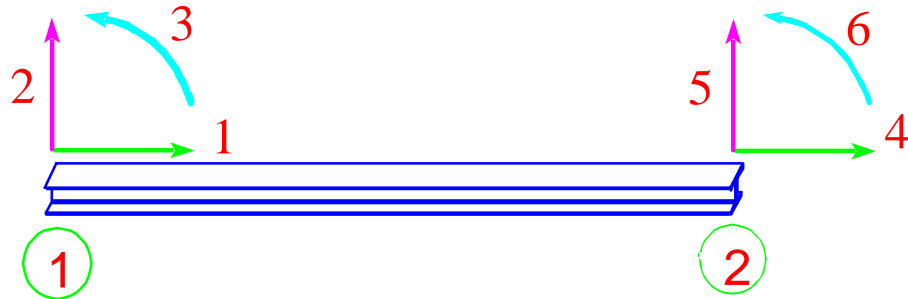


Fig. 2

Finalmente:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

4].- BARRA DE ESTRUCTURA PLANA (EXTENSIBLE)



COMBINACIÓN DE LOS CASOS 1 Y 3.-

N1	=	$\frac{EA}{L}$	0	0	-	$\frac{EA}{L}$	0	0	·	u_1
V2		0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$			v_2
M3		0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$			θ_3
N4		$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0			u_4
V5		0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$			v_5
M6		0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$			θ_6

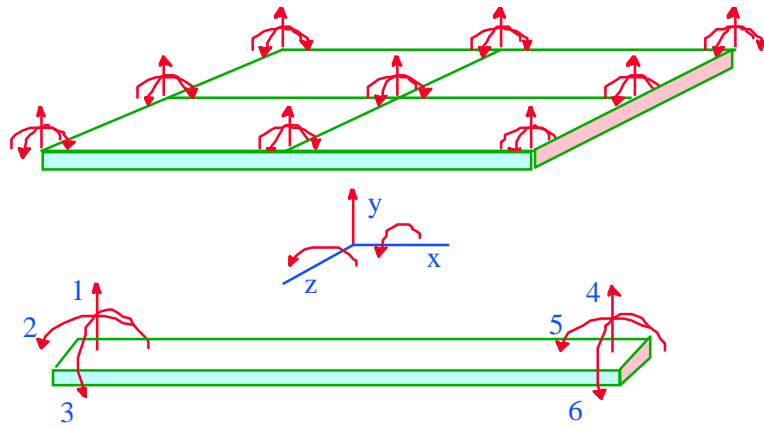
Condensando las particiones:

F_1		K_{11}	K_{12}	u_1
F_2		K_{21}	K_{22}	u_2

CARACTERÍSTICAS DE LA MATRIZ RIGIDEZ

- Un elemento k_{ij} , representa, la fuerza que aparece en la coordenada i cuando se comunica un movimiento unidad en la coordenada j , manteniendo nulos todos los demás.
- La columna j ($k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}$), se genera, analizando las fuerzas que van apareciendo en todas las coordenadas ($1, 2, \dots, n$) al comunicar un movimiento unidad en la coordenada j , manteniendo nulos todos los demás.
- La fila i ($k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}$), se genera, analizando las fuerzas que aparecen en la coordenada i , al comunicar un movimiento unidad, sucesivamente, a las n coordenadas, manteniendo en cada caso nulos todos los demás.
- Los elementos de la diagonal principal no pueden ser negativos pues representan las fuerzas que aparecen en una coordenada al dar justamente movimiento unidad en ella misma.
- La matriz de rigidez es simétrica debido al principio de reciprocidad ($k_{ij} = k_{ji}$).

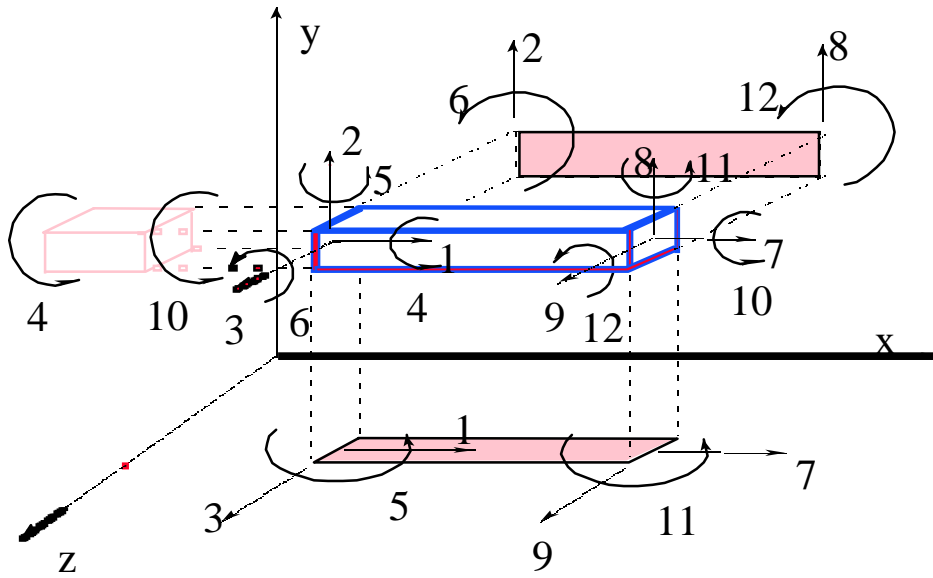
5].- ELEMENTO DE EMPARRILLADO



$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_y \\ \theta_x \\ \theta_z \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_y \\ M_x \\ T_z \end{bmatrix} \qquad \frac{E \cdot A}{L} \Rightarrow \frac{G \cdot I_p}{L}$$

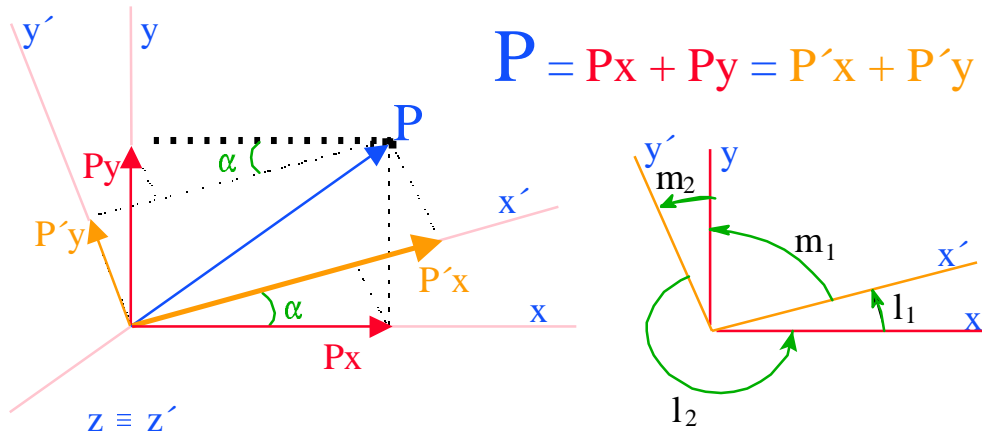
V1	=	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	·	u1
M2		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0		θ2
T3		0	0	$\frac{GI_p}{L}$	0	0	$-\frac{GI_p}{L}$		θ3
V4		$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0		u4
M5		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0		θ5
T6		0	0	$-\frac{GI_p}{L}$	0	0	$\frac{GI_p}{L}$		θ6

6].- ELEMENTO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL



$\frac{EA}{L}$						SIMETRÍA				
0	$\frac{12EIz}{L^3}$									
0	0	$\frac{12EIy}{L^3}$								
0	0	0	$\frac{GIp}{L}$							
0	0	$-\frac{6EIy}{L^2}$	0	$\frac{4EIy}{L}$						
0	$\frac{6EIz}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EIz}{L}$					
$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$				
0	$-\frac{12EIz}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EIz}{L^2}$	0	$\frac{12EIz}{L^3}$			
0	0	$-\frac{12EIy}{L^3}$	0	$\frac{6EIy}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EIy}{L^3}$		
0	0	0	$-\frac{GIp}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GIp}{L}$	
0	0	$-\frac{6EIy}{L^2}$	0	$\frac{2EIy}{L}$	0	0	0	$\frac{6EIy}{L^2}$	0	$\frac{4EIy}{L}$
0	$\frac{6EIz}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EIz}{L}$	0	$-\frac{6EIz}{L^2}$	0	0	$\frac{4EIz}{L}$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS



$$\mathbf{P} = P_x + P_y = P'_x + P'_y$$

$$P'_x = P_x \cdot \cos \alpha + P_y \cdot \sin \alpha$$

$$P'_y = -P_x \cdot \sin \alpha + P_y \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{vmatrix} P'_x \\ P'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \end{vmatrix}$$

Si designamos por $u_{x'}$, $u_{y'}$ los vectores unitarios que definen la posición de los ejes $x'-y'$ respecto a los $x-y$:

$$u_{x'} = i \cdot \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha$$

$$u_{y'} = -i \cdot \sin \alpha + j \cdot \cos \alpha$$

Los cosenos directores l_1 , l_2 , m_1 , m_2 , por columnas, de los nuevos vectores respecto de los antiguos, serán:

$$\begin{matrix} l_1 = \cos(x'x) & m_1 = \cos(x'y) \\ l_2 = \cos(y'x) & m_2 = \cos(y'y) \end{matrix} \quad u_{x'} = \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ m_1 \end{vmatrix} \quad u_{y'} = \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_2 \\ m_2 \end{vmatrix}$$

Siendo: $\begin{vmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = \mathbf{L}^T$, matriz de rotación.

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \mathbf{L}$$
, matriz de transformación.

Por lo tanto, podemos escribir para los vectores (y lo mismo para los movimientos):

$$\mathbf{P}' = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{P}$$

$$\delta' = \mathbf{L}^T \cdot \delta \quad [11]$$

Puede comprobarse que $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{I} =$ matriz unidad; o sea, $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$; con lo que resulta, premultiplicando las [11]:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{L} \cdot \delta' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \delta$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}'$$

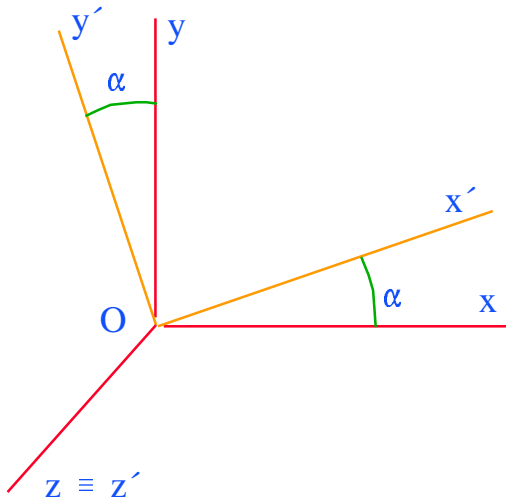
$$\delta = \mathbf{L} \cdot \delta'$$

[12]

ALGUNOS CASOS DE TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Elemento plano empotrado:

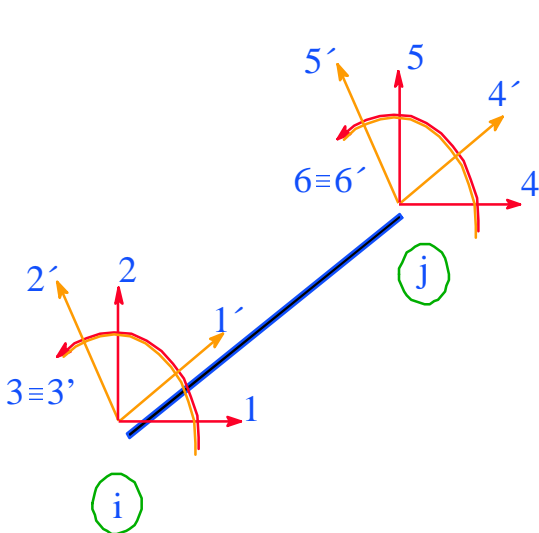
Los ángulos y momentos flectores no cambian con los nuevos ejes.



$$L = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L^T = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Parra el caso de la barra completa:

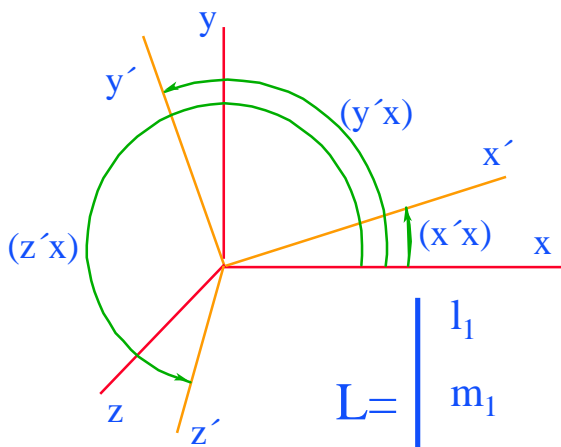


$$\begin{vmatrix} P_i \\ \dots \\ P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L^T & 0 \\ 0 & L^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_i \\ \dots \\ P_j \end{vmatrix}$$

$$P' = L^T \cdot P$$

$$\delta' = L^T \cdot \delta$$

Parra el caso de un elemento tridimensional:



$$\begin{aligned}
 l_1 &= \cos(x'x) & m_1 &= \cos(x'y) & n_1 &= \cos(x'z) \\
 l_2 &= \cos(y'x) & m_2 &= \cos(y'y) & n_2 &= \cos(y'z) \\
 l_3 &= \cos(z'x) & m_3 &= \cos(z'y) & n_3 &= \cos(z'z)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

Aquí las relaciones entre vectores de fuerzas, de momentos, de desplazamientos y giros son, en un nodo:

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}' = \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\delta}' = \begin{bmatrix} \delta'_x \\ \delta'_y \\ \delta'_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{\theta}' = \begin{bmatrix} \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

Y si consideramos el elemento tridimensional, establecemos (nudos i y j, $i < j$):

$$\mathbf{[P']} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}'_i \\ \mathbf{M}'_i \\ \mathbf{P}'_j \\ \mathbf{M}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{M}_i \\ \mathbf{P}_j \\ \mathbf{M}_j \end{bmatrix}$$

(12×1)
 (12×12)
 (12×1)

Para un elemento cualquiera de los antes considerados:

$$P' = L^T \cdot P$$

$$\delta' = L^T \cdot \delta \quad ; \text{ pero también: } P' = k' \cdot \delta' \text{ (en locales)}$$

Sustituyendo: $P' = k' \cdot \delta'$ $L^T \cdot P = k' \cdot \delta' = k' \cdot L^T \cdot \delta$

Premultiplicando por L: $L \cdot L^T \cdot P = (L \cdot k' \cdot L^T) \cdot \delta$

$$P = (L \cdot k' \cdot L^T) \cdot \delta$$

[13]

RELACIÓN FUNDAMENTAL

Donde:

P, vector de cargas en globales.

δ , vector desplazamientos en globales.

Matriz $(L \cdot k' \cdot L^T)$, en globales.

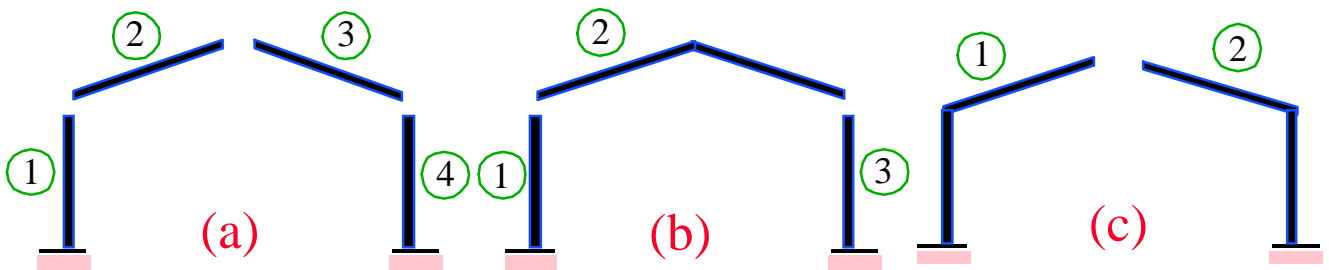
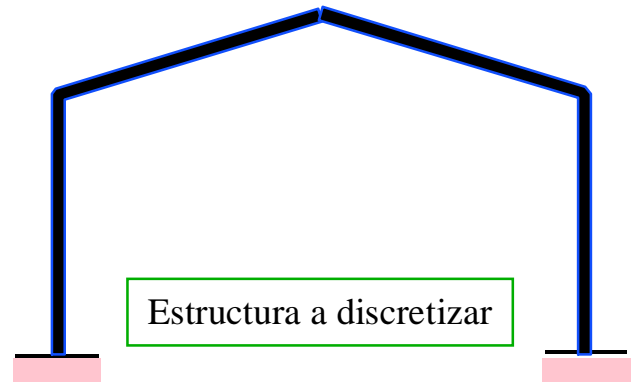
$$K = (L \cdot k' \cdot L^T)$$

[14]

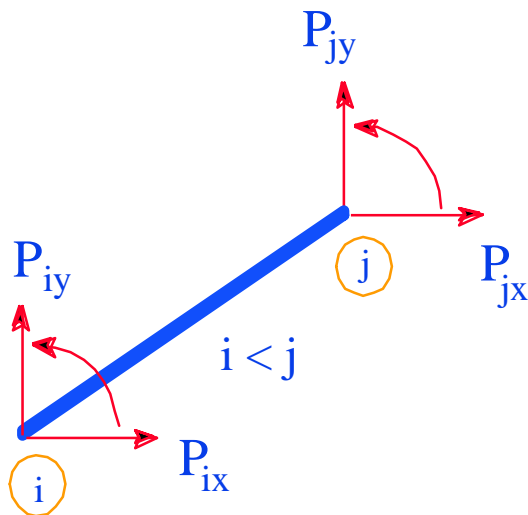
Nos permite pasar cada matriz en coordenadas locales a matriz en coordenadas globales por operaciones con la matriz de transformación, L, y su transpuesta, L^T .

EL ELEMENTO Y LA ESTRUCTURA; DISCRETIZACIÓN

La elección usual de la discretización (a) obedece a que las matrices de los elementos son iguales en coordenadas locales para todos y a que es la forma intuitiva de descomponer en lo que consideramos como elementos-vigas.



RECORDATORIO



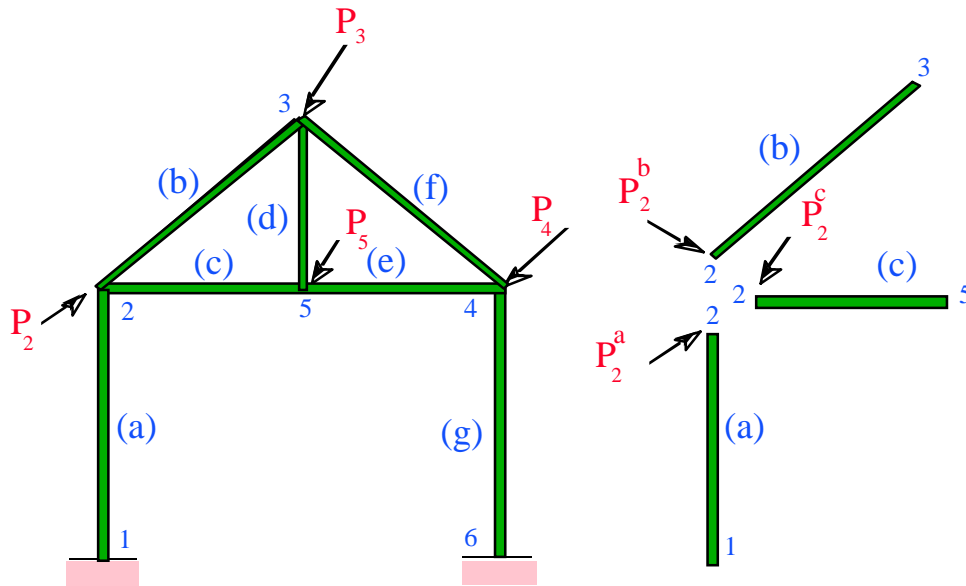
$$P = k \cdot \delta = \begin{cases} P_i = k_{ii} \cdot \delta_i + k_{ij} \cdot \delta_j \\ P_j = k_{ji} \cdot \delta_i + k_{jj} \cdot \delta_j \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} P_i \\ \dots \\ P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ \dots & \dots \\ k_{ji} & k_{jj} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_i \\ \dots \\ \delta_j \end{vmatrix}$$

k_{ij}

Representa las fuerzas que aparecen en el nodo i al aplicar movimientos unidad en el nodo j

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA



Barra 1,2 (a):

$$\begin{vmatrix} P_1^a \\ P_2^a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_1^a \\ \delta_2^a \end{vmatrix} \Rightarrow P_2^a = k_{21}^a \cdot \delta_1^a + k_{22}^a \cdot \delta_2^a$$

Barra 2,3 (b):

$$\begin{vmatrix} P_2^b \\ P_3^b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{22}^b & k_{23}^b \\ k_{32}^b & k_{33}^b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_2^b \\ \delta_3^b \end{vmatrix} \Rightarrow P_2^b = k_{22}^b \cdot \delta_2^b + k_{23}^b \cdot \delta_3^b$$

Barra 2,5 (c):

$$\begin{vmatrix} P_2^c \\ P_5^c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{22}^c & k_{25}^c \\ k_{52}^c & k_{55}^c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_2^c \\ \delta_5^c \end{vmatrix} \Rightarrow P_2^c = k_{22}^c \cdot \delta_2^c + k_{25}^c \cdot \delta_5^c$$

Sumando y teniendo en cuenta las relaciones de compatibilidad:

$$P_2^a + P_2^b + P_2^c = \mathbf{P_2} = k_{21}^a \cdot \delta_1^a + \underbrace{(k_{22}^a + k_{22}^b + k_{22}^c)}_{\mathbf{k_{22}}} \cdot \delta_2^a + k_{23}^b \cdot \delta_3^b + k_{25}^c \cdot \delta_5^c$$

CONCLUSIONES

$$P_2^a + P_2^b + P_2^c = \mathbf{P}_2 = \underbrace{k_{21}^a \cdot \delta_1^a + (k_{22}^a + k_{22}^b + k_{22}^c) \cdot \delta_2 + k_{23}^b \cdot \delta_3 + k_{25}^c \cdot \delta_5}_{\mathbf{k}_{22}}$$

\mathbf{P}_2

{ Vector de fuerzas en coordenadas globales asociado al nudo 2.

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_5$

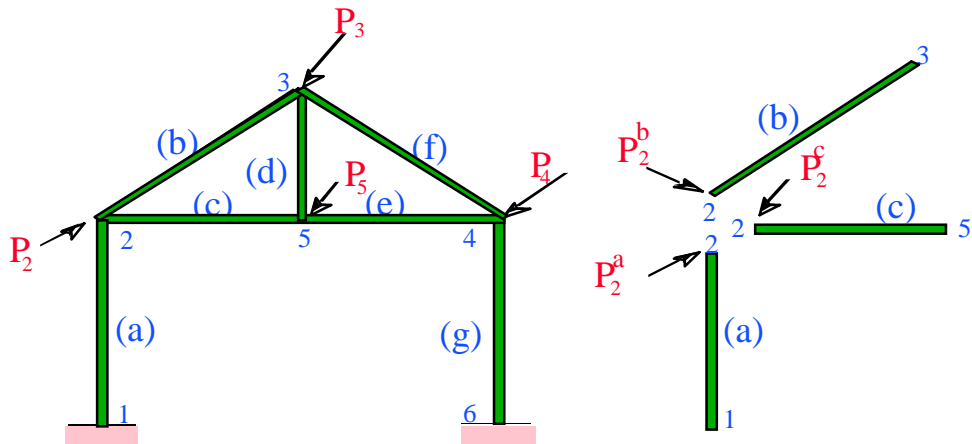
{ Vectores de movimientos en coordenadas globales asociados a los nudos 1, 2, 3, 5, que físicamente están ligados con el propio nudo 2.

\mathbf{K}_{22}

{ Elemento de la matriz de rigidez que relaciona fuerzas en el nudo 2 con δ_2 ; es decir, es la fuerza que aparece en 2 con un movimiento unidad en 2, permaneciendo nulos todos los demás; y es la suma de las submatrices asociadas a ese nudo 2 de los distintos elementos que en él concurren ($K_{22}^a, K_{22}^b, K_{22}^c$); a \mathbf{K}_{22} se la suele denominar "rigidez directa" del nudo 2.

$\mathbf{K}_{21}^a, \mathbf{K}_{23}^b, \mathbf{K}_{25}^c$

{ Fuerzas que aparecen en el nudo 2 con movimientos unitarios respectivos en 1,3,5, (ligados físicamente al 2) manteniendo nulos todos los demás; cada una relaciona las fuerzas en los nudos 1,3,5, con los respectivos movimientos $\delta_1, \delta_3, \delta_5$.



GENERALIZACIÓN:

Un "elemento" de la matriz de rigidez de la estructura se compone:

- a).- Si se trata de un "elemento" de la diagonal (k_{nn}) de tantos sumandos como barras concurren en el nudo asociado a la fila (o columna).
- b).- Los "elementos" que no pertenezcan a la diagonal principal se compondrán de un solo sumando, si existe unión física real entre los nodos asociados a la fila y columna de que se trate; y serán idénticamente nulos si no existe unión física.

La ecuación matricial es la imagen "fotografía" de la estructura

R_1	\vdots	K_{11}^a	K_{12}^a	\vdots	0	\vdots	0	\vdots	0	0	δ_1
P_2	\vdots	K_{21}^a	$K_{22}^a + K_{22}^b + K_{22}^c$	K_{23}^b	\vdots	0	\vdots	K_{25}^c	\vdots	0	δ_2
P_3	\vdots	0	K_{32}^b	$K_{33}^b + K_{33}^d + K_{33}^f$	K_{34}^f	\vdots	K_{35}^d	\vdots	0	0	δ_3
P_4	\vdots	0	0	\vdots	K_{43}^f	$K_{44}^e + K_{44}^f + K_{44}^g$	K_{45}^e	\vdots	K_{46}^f	\vdots	δ_4
P_5	\vdots	0	K_{52}^c	\vdots	K_{53}^d	\vdots	K_{54}^e	$K_{55}^c + K_{55}^d + K_{55}^e$	\vdots	0	δ_5
R_6	\vdots	0	0	\vdots	0	\vdots	K_{64}^f	0	\vdots	K_{66}^f	δ_6

**APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO:
CÁLCULO DE LAS REACCIONES Y ESFUERZOS EN LOS ELEMENTOS**

Cada grado de fijación de la estructura, supone, un movimiento nulo, si R son las restricciones y L los grados de libertad, tendremos:

$$\begin{vmatrix} F_L \\ F_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_L \\ \delta_R \end{vmatrix} = 0$$

(L ecuaciones, L incógnitas)
(R ecuaciones, R incógnitas)

En la práctica no es necesario cambiar el orden de filas matriciales para resolver..., basta suprimir las filas con movimientos nulos y las columnas correspondientes, de igual numeración.

$$F_L = K_{LL} \cdot \delta_L \quad [19]$$

$$F_R = K_{RL} \cdot \delta_L \quad [20]$$

$$K_{LL}^{-1} \cdot F_L = \delta_L$$

Cálculo de los esfuerzos en los elementos.

$$P' = L^T \cdot P = \underbrace{L^T \cdot k}_{(1)} \cdot \delta = L^T \cdot (L \cdot k' \cdot L^T) \cdot \delta = \underbrace{k' \cdot L^T}_{(2)} \cdot \delta = \underbrace{k' \cdot \delta'}_{(3)}$$

[21]

Resumen del Método. Sistematización práctica.

- 1.- Analizar bien la estructura. Predimensionar. Fijar modo físico de trabajo (articulado, empotrado, torsión, plana o espacial, etc.)
- 2.- Ordenar nudos y barras, fijar coordenadas locales y globales.
- 3.- Paso de locales a globales las cargas aplicadas en los nudos, previo cálculo de las matrices de transformación y su traspuesta de cada barra.

Vector de cargas.

$$\mathbf{P}_{\text{nudos}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}'_{\text{nudos}}$$

- 4.- Paso de locales a globales de cada matriz de rigidez de las barras, previo calculo en locales de las mismas.

$$\mathbf{k}'_{\text{barras}}$$

$$\mathbf{k}_{\text{barras}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}'_{\text{barras}} \cdot \mathbf{L}^T$$

- 5.- Ecuación matricial global.

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \delta$$

- 6.- Separar acciones con restricciones (filas y columnas).

- 7.- Resolución del sistema, calculando los movimientos incógnita en globales.

$$\delta = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P}$$

Paso de movimientos a locales.

$$\delta' = \mathbf{L}^T \cdot \delta$$

- 8.- Cálculo de esfuerzos en cada barra en locales y comprobación de la solución estudiada.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{K}' \cdot \delta'$$

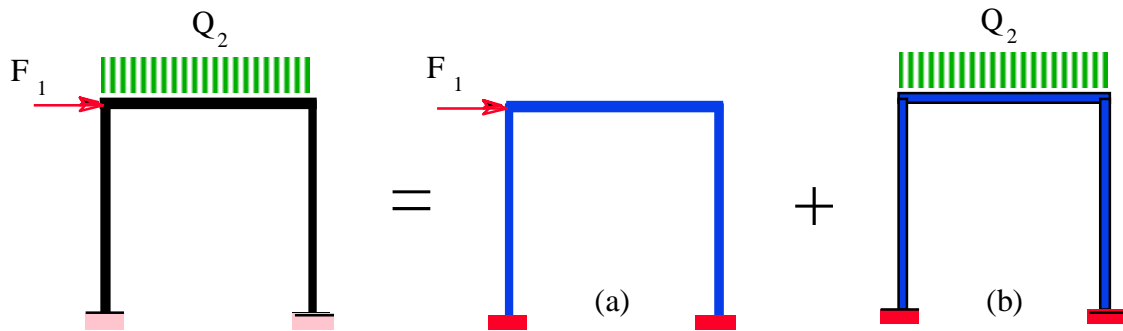
- 9.- Cálculo de reacciones, bien a través de los esfuerzos calculados en barras o bien en la forma.

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{K}_{RL} \cdot \delta_L$$

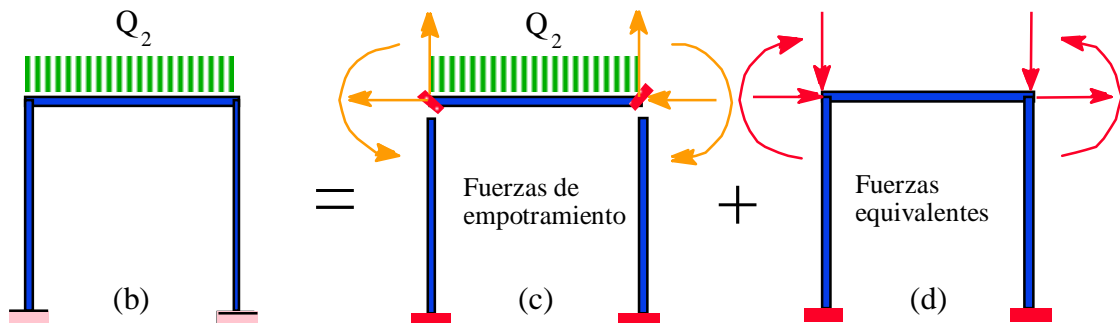
ACCIONES EXTERIORES SOBRE LOS ELEMENTOS

La solución se obtiene aplicando superposición, en la siguiente forma:

Separamos las cargas aplicadas en nudos de las aplicadas en barras.



Suponemos todos los nudos empotrados y calculamos las fuerzas de empotramiento para las cargas aplicadas en las barras, considerando el estado (b) como la superposición de dos.



En (c) aplicamos en los nudos las fuerzas necesarias para mantenerlos fijos, esto es, las que aparecerían en los empotramientos si estuvieran empotradas todas las barras.

Puesto que el sistema (d) sí provoca movimientos en la estructura, a él aplicaremos el cálculo matricial y, al final, tendremos en cuenta las fuerzas del estado (c), que quedan como aparcadas hasta entonces.

$$\begin{array}{l} \text{esfuerzos} \\ \text{totales en} \\ \text{globales:} \end{array} \implies \begin{bmatrix} P't_i \\ P't_j \end{bmatrix}_b = P'_{\text{emp.}} + L^T \cdot \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}$$

Resueltos los movimientos, para calcular los esfuerzos en las barras hemos de considerar las acciones de empotramiento, que dejamos antes.

Resumen del Método. Sistematización práctica.

- 1.- Analizar bien la estructura. Predimensionar. Fijar modo físico de trabajo (articulado, empotrado, torsión, plana o espacial, etc.)
- 2.- Ordenar nudos y barras, fijar coordenadas locales y globales.
- 3.- Calcular cargas y reacciones en nudos extremos de cada barra. Pasar cargas a nudos y anotar para su utilización posterior las reacciones hiperestáticas.

Vector de cargas.

$$\mathbf{P}'_{\text{nudos}} = - \mathbf{P}'_{\text{hiperestáticas}}$$

- 4.- Paso de locales a globales de los vectores de carga, previo calculo de las matrices de transformación y su traspuesta de cada barra.

$$\mathbf{P}_{\text{nudos}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}'_{\text{nudos}}$$

- 5.- Paso de locales a globales de cada matriz de rigidez de las barras, previo calculo en locales de las mismas.

$$\mathbf{k}'_{\text{barras}}$$

$$\mathbf{k}_{\text{barras}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}'_{\text{barras}} \cdot \mathbf{L}^T$$

- 6.- Ecuación matricial global.

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \delta$$

- 7.- Separar acciones con restricciones (filas y columnas).

- 8.- Resolución del sistema, calculando los movimientos incógnita en globales.

$$\delta = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P}$$

Paso de movimientos a locales.

$$\delta' = \mathbf{L}^T \cdot \delta$$

- 9.- Cálculo de esfuerzos en cada barra en locales y comprobación de la solución estudiada.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{K}' \cdot \delta' + \mathbf{P}'_{\text{hiperestáticas}}$$

- 10.- Cálculo de reacciones, bien a través de los esfuerzos calculados en barras o bien en la forma.

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{K}_{RL} \cdot \delta_L$$