
Ingeniería Estructural

Inestabilidad elástica

Pandeo de piezas rectas

- Imaginemos una hoja de sierra
 - $\sigma_y = 520 \text{ MPa}$
 - Sección transversal 12mm x 0.5mm
 - La hoja de sierra resistiría una carga de compresión de 3120 N
- Sin embargo, esta pieza puede perder su estabilidad a una carga mucho menor

La hoja de sierra perdería su estabilidad estructural para una carga que podríamos calcular:

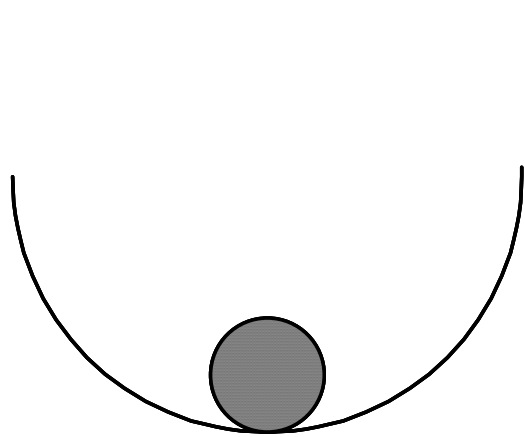
Supongamos:

$$I = bh^3/12 \text{ (sección rectangular)} = 1,25 \times 10^{-13} \text{ m}^4$$

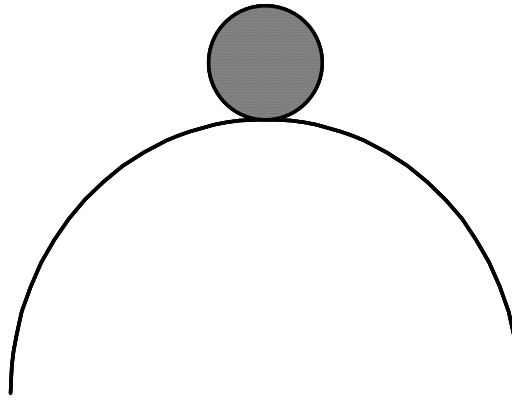
$$E = 200 \text{ GPa y } L = 300\text{mm}$$

$$\text{La carga que produciría el pandeo sería: } P = 2,74\text{N}$$

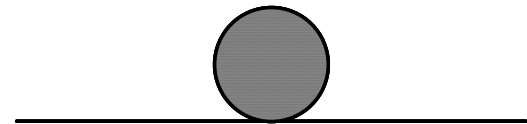
ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO



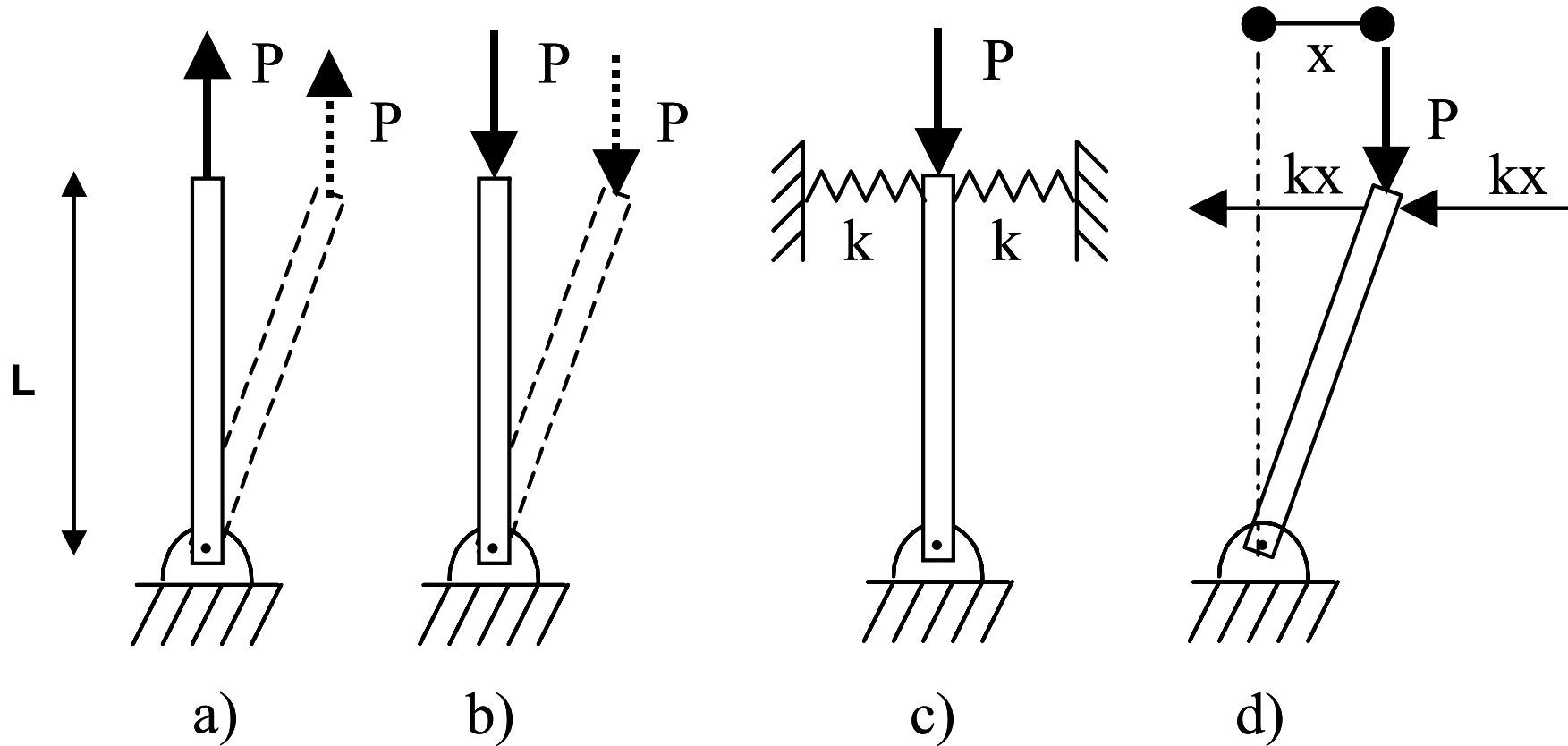
Equilibrio estable



Equilibrio inestable

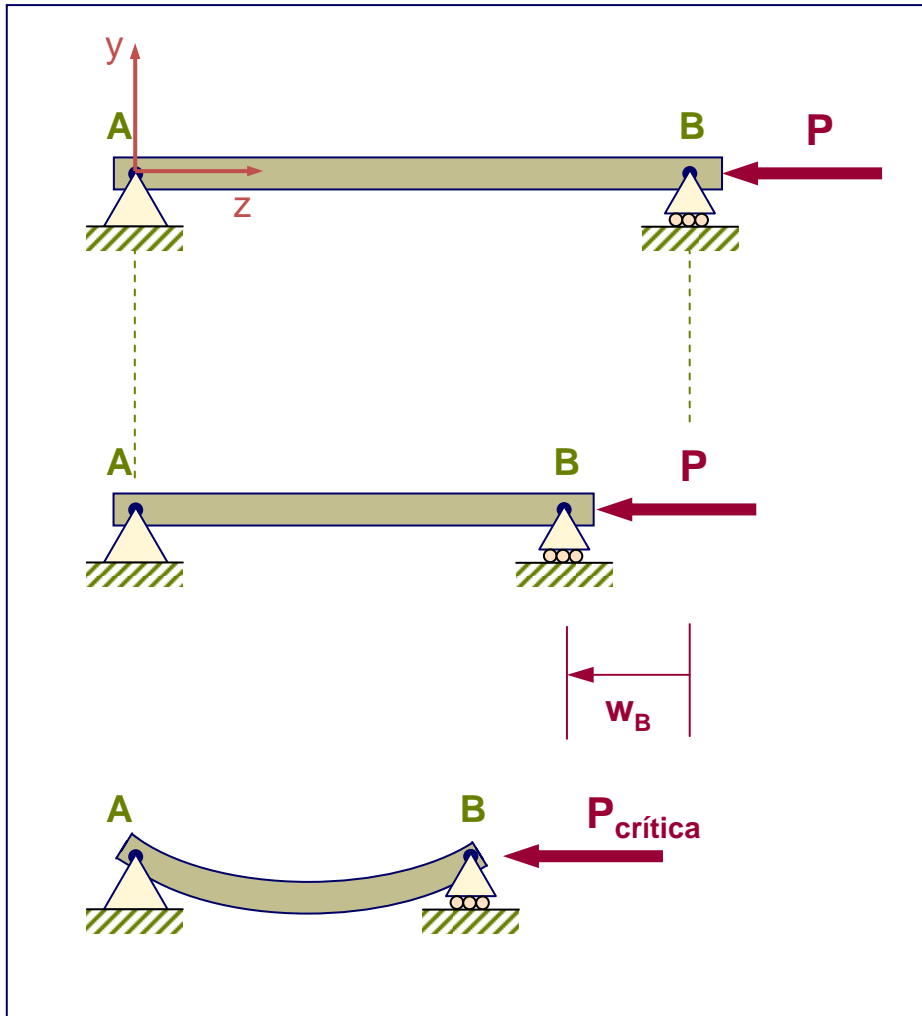


Equilibrio indiferente



Si: $2(kx)L > Px$ (lo que implica $P < 2kL$) el equilibrio es **estable**.
 Si: $2(kx)L < Px$ (lo que implica $P > 2kL$) el equilibrio es **inestable**.

Concepto de inestabilidad estructural



Para cargas bajas

$$w_B = w_A + \int_A^B \frac{N}{E \cdot A} dz$$

$$w_B = -\frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

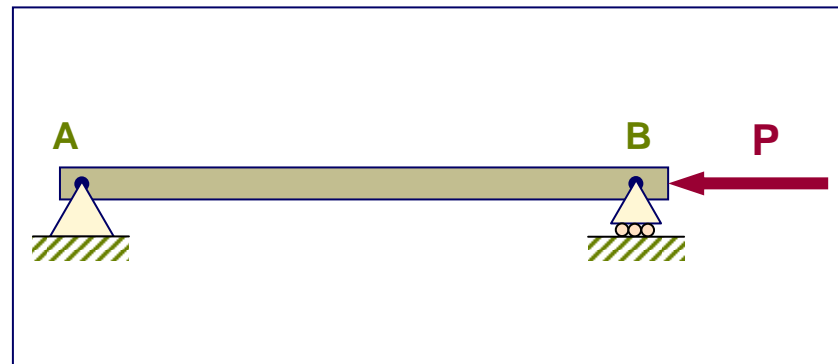
Para una cierta $P_{crítica}$ se producen grandes desplazamientos transversales

Aparecen fenómenos no lineales

Pandeo

Concepto de inestabilidad estructural

El pandeo aparece en barras esbeltas para cargas menores que las que producen la plastificación del material



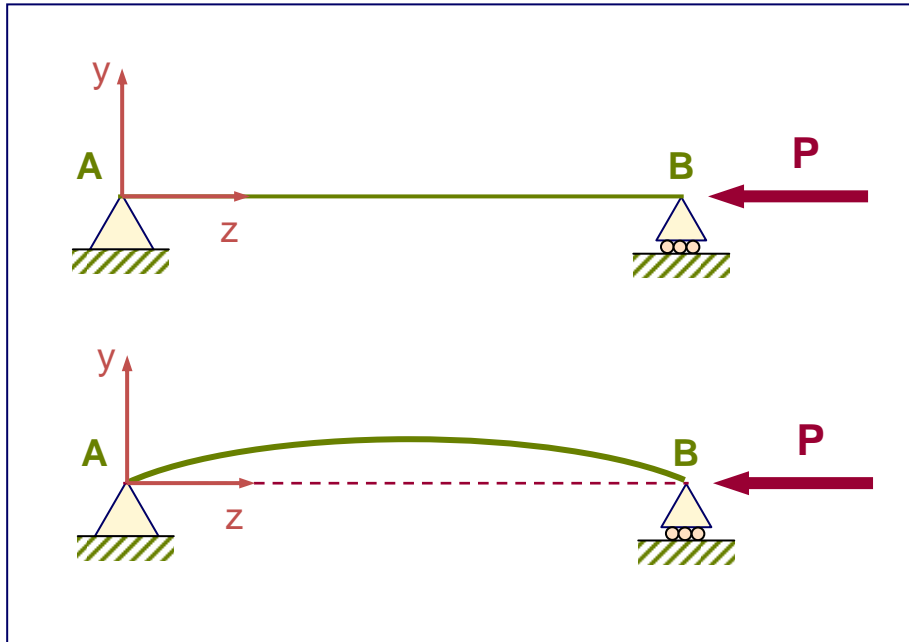
$$P < P_{\text{critica}}$$

$$P < \sigma_e^{\text{comp}} \cdot A$$

Puede ser la condición de
diseño crítica

Teoría de primer orden

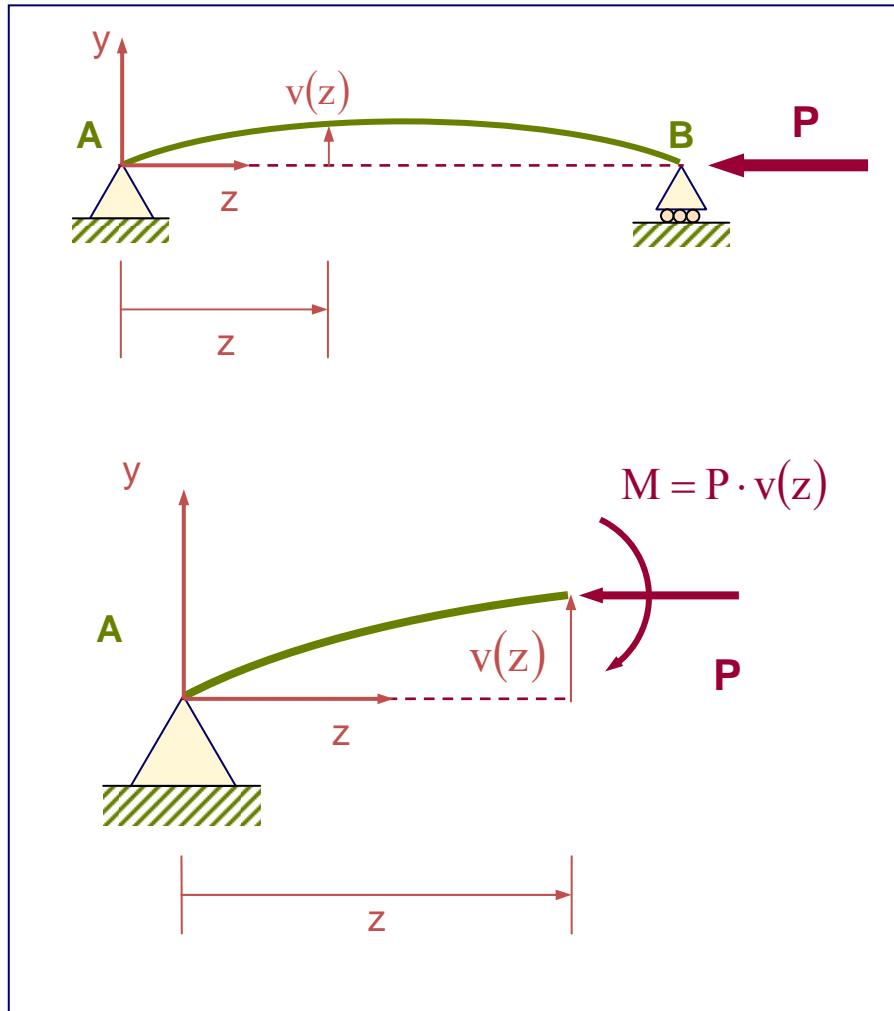
Problema de Euler



Hipótesis:

- **Viga esbelta de sección constante**
- **Ejes principales de inercia**
- **Sólo existen esfuerzos de compresión**
- **Comportamiento lineal elástico**
- **Pequeños desplazamientos de flexión**
- **Deformaciones pequeñas**
- **No existen tensiones residuales**

Teoría de primer orden



Aplicando la ecuación de la elástica

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I}$$



$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \cdot v = 0 \quad \lambda^2 = \left(\frac{P}{E \cdot I} \right)$$

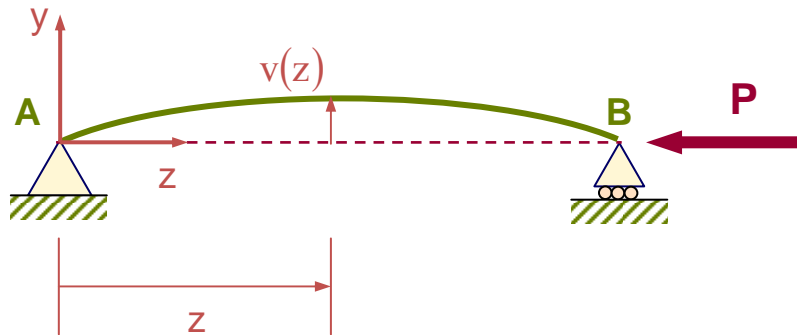
$$v(z) = A \cdot \cos \lambda z + B \cdot \operatorname{sen} \lambda z$$

Con las condiciones de contorno:

$$z = 0 \quad v = 0$$

$$z = L \quad v = 0$$

Teoría de primer orden



$$v(z) = A \cdot \cos \lambda z + B \cdot \operatorname{sen} \lambda z$$

$$A = 0$$

$$B \cdot \operatorname{sen}(\lambda \cdot L) = 0$$

$$\lambda \cdot L = n \cdot \pi$$

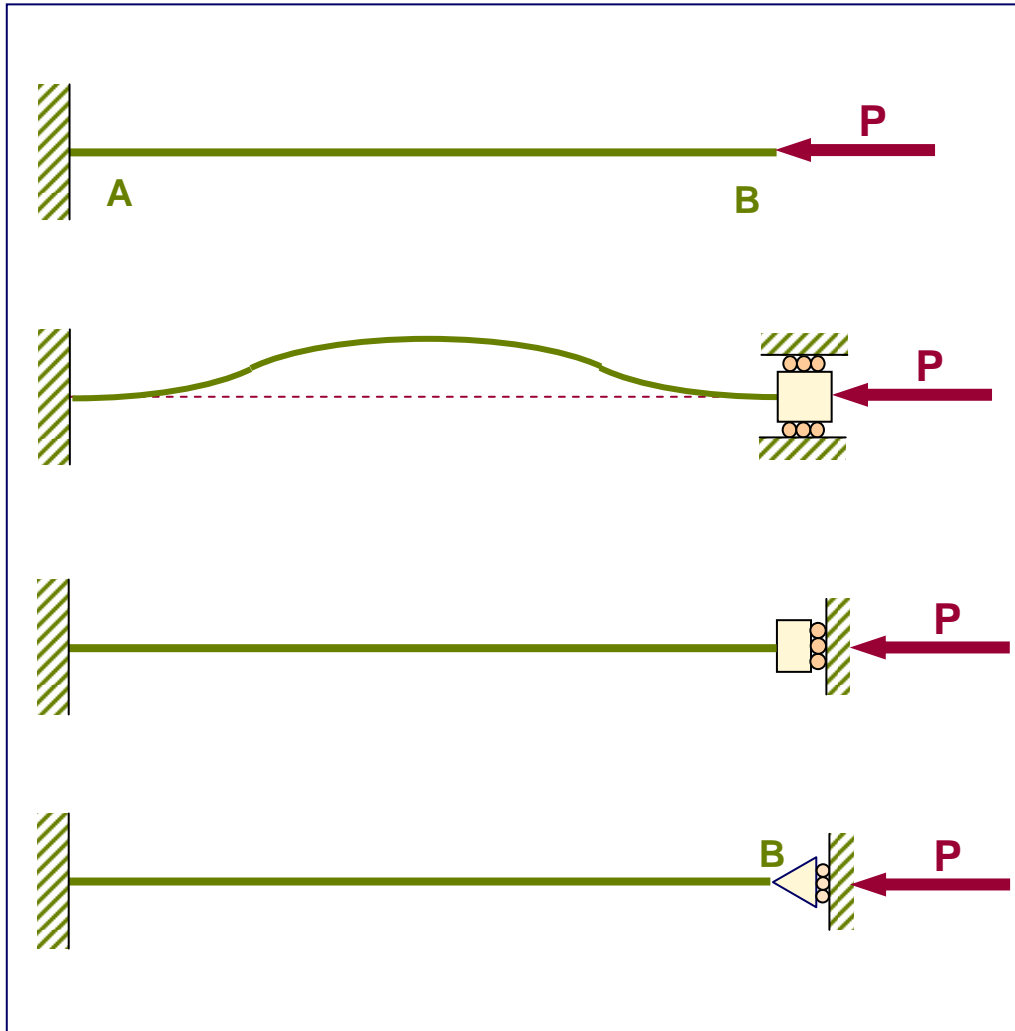
$$v(z) = B \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot z\right)$$

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I$$

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I$$

Carga crítica de Euler
(1744)

Influencia de las condiciones de apoyo



Viga en voladizo

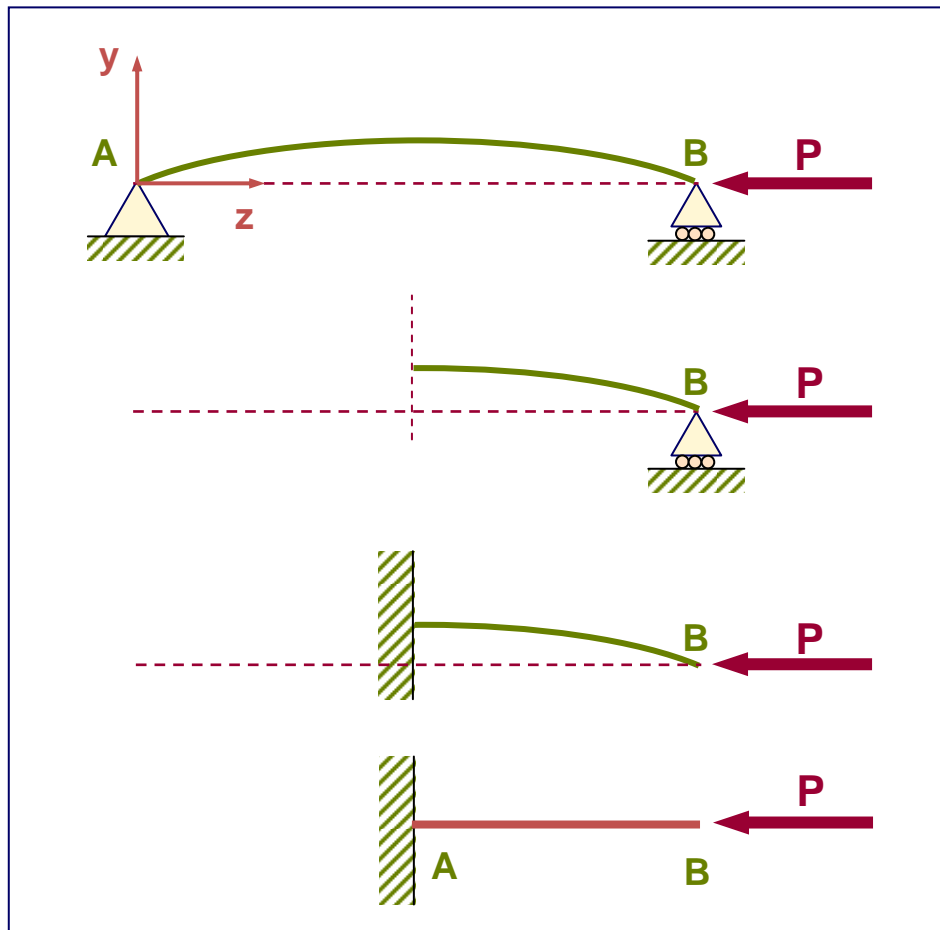
Viga biempotrada con deslizadera horizontal

Viga biempotrada con deslizadera vertical

Viga empotrada-apoyada con deslizadera vertical

Influencia de las condiciones de apoyo

Viga en voladizo



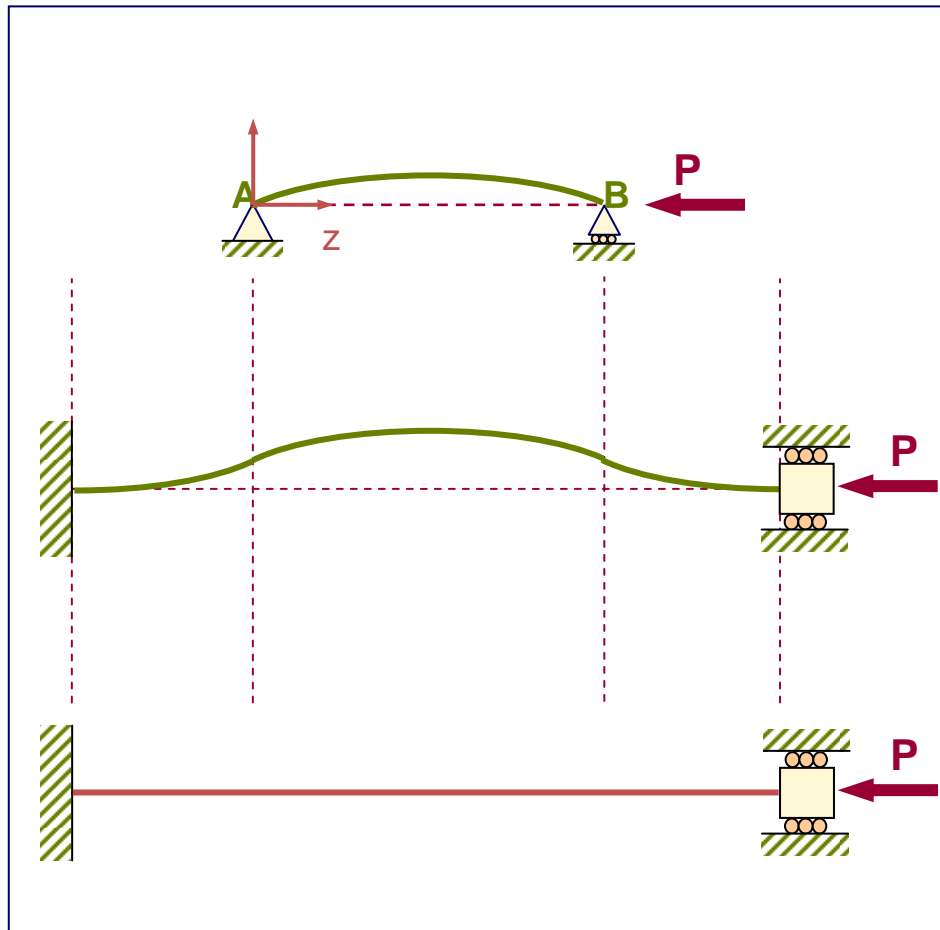
La carga de pandeo coincide con la de una viga biapoyada de longitud doble

$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{(2 \cdot L)^2} \cdot E \cdot I$$

$$P_{critica} = \frac{P_{Euler}}{4}$$

Influencia de las condiciones de apoyo

Viga bi-empotrada con desplazamiento longitudinal en un extremo



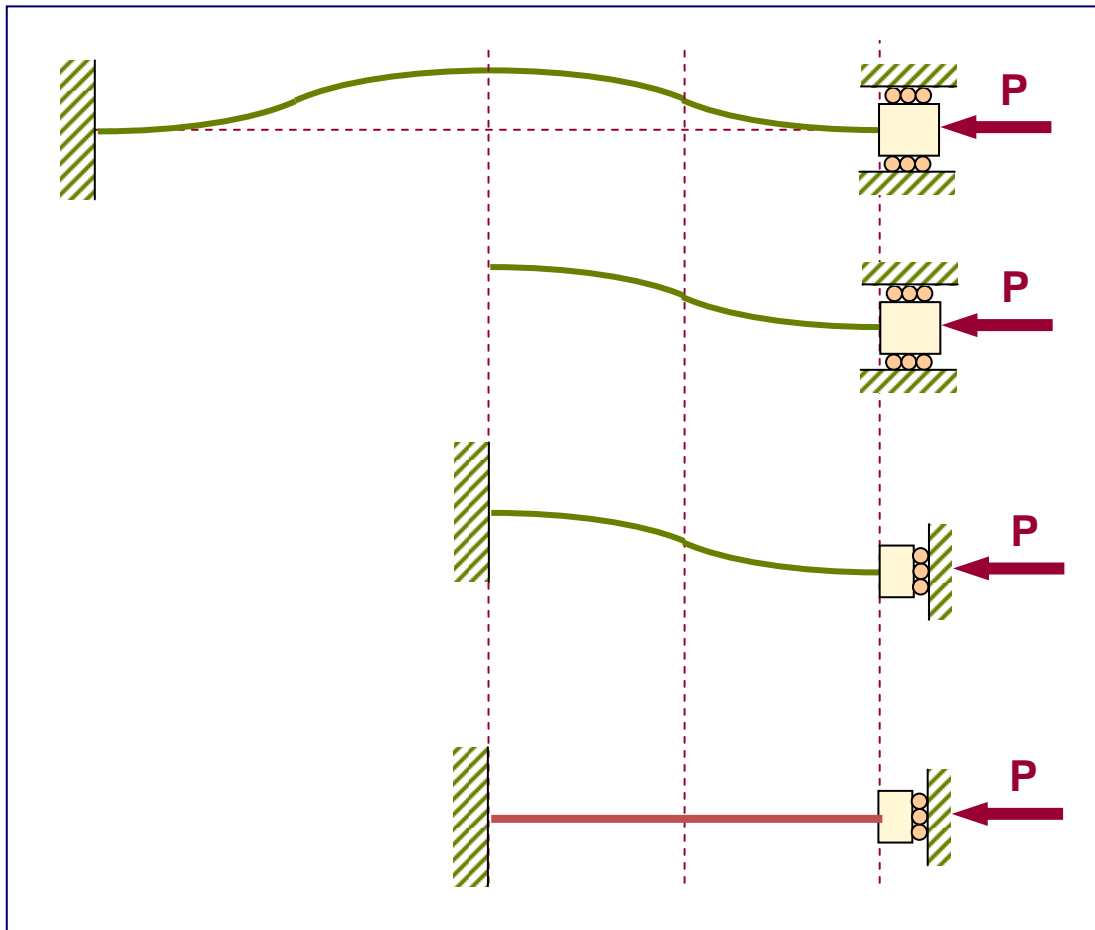
La carga de pandeo coincide con la de una viga biapoyada de longitud mitad

$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot E \cdot I$$

$$P_{critica} = 4 \cdot P_{Euler}$$

Influencia de las condiciones de apoyo

Viga bi-empotrada con desplazamiento transversal en un extremo



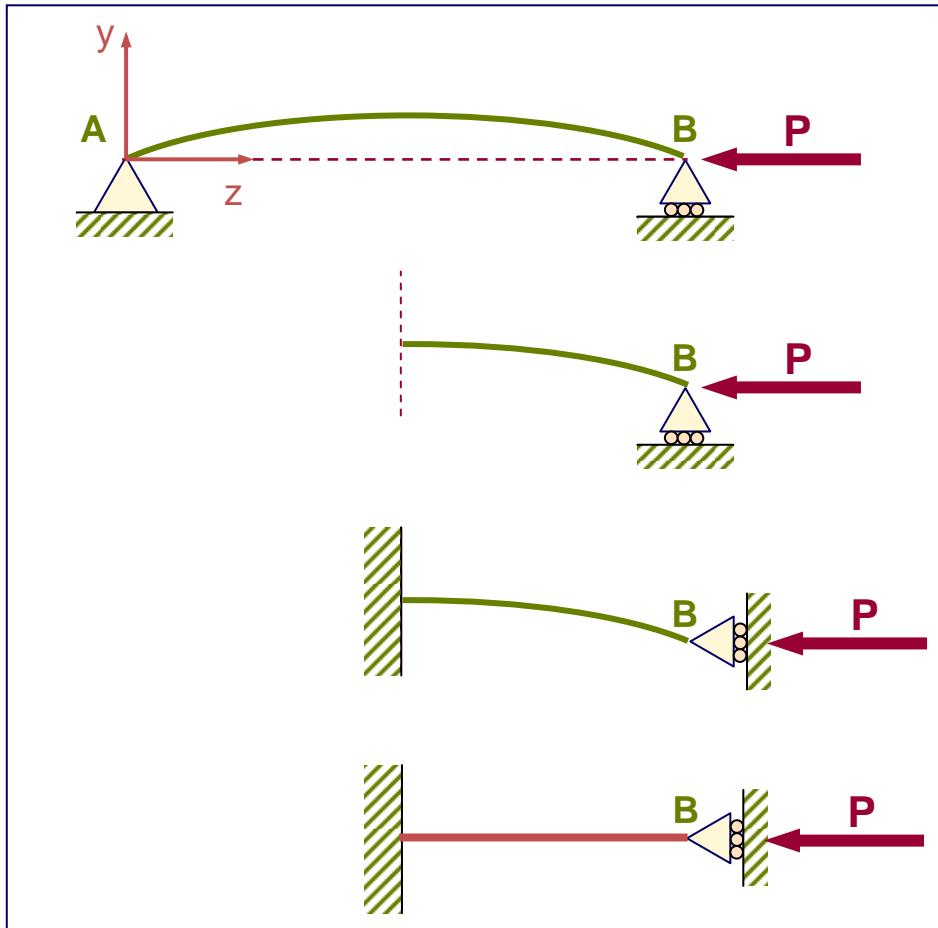
La carga de pandeo coincide con la de una viga biempotrada de longitud doble

$$P_{critica} = \frac{4 \cdot \pi^2}{(2 \cdot L)^2} \cdot E \cdot I$$

$$P_{critica} = P_{Euler}$$

Influencia de las condiciones de apoyo

Viga empotrada-apoyada con desplazamiento transversal en un extremo



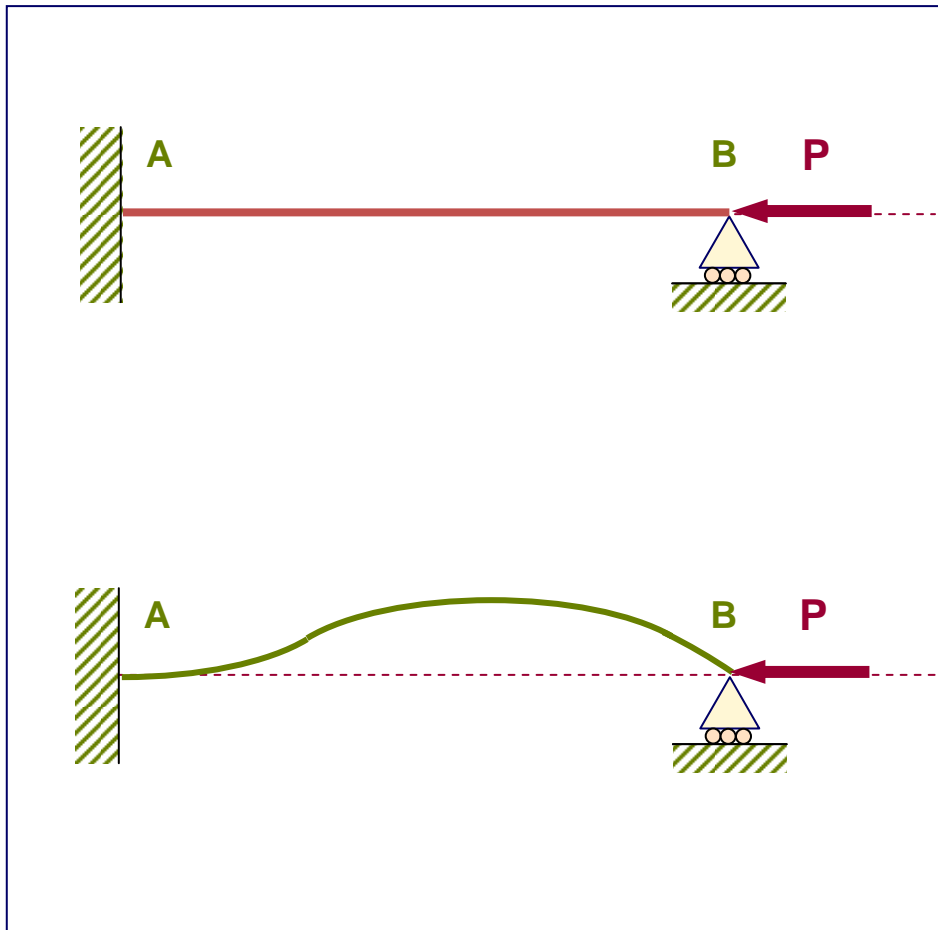
La carga de pandeo coincide con la de una viga biempotrada de longitud doble

$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{(2 \cdot L)^2} \cdot E \cdot I$$

$$P_{critica} = \frac{P_{Euler}}{4}$$

Influencia de las condiciones de apoyo

Viga empotrada-apoyada con desplazamiento longitudinal en un extremo



No es posible aplicar simetrías

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 \cdot v = 0 \quad \lambda^2 = \left(\frac{P}{E \cdot I} \right)$$

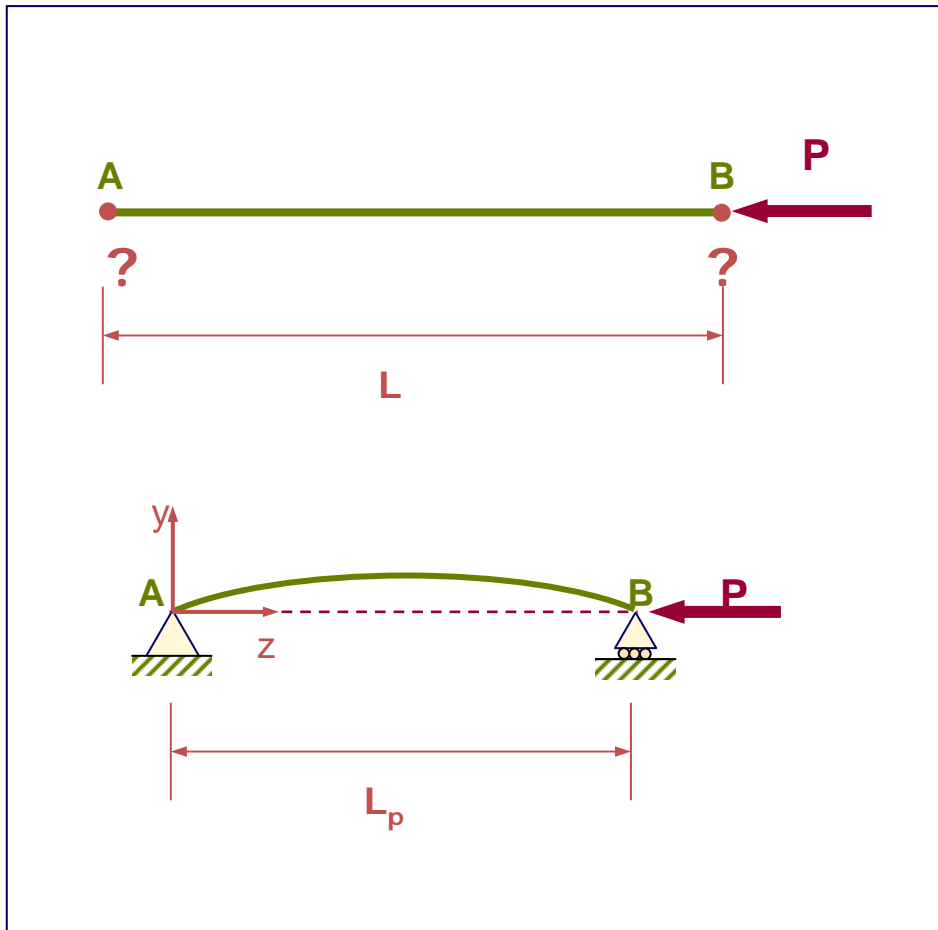
+

condiciones de contorno

$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{(0,7 \cdot L)^2} \cdot E \cdot I$$

Influencia de las condiciones de apoyo

En general:



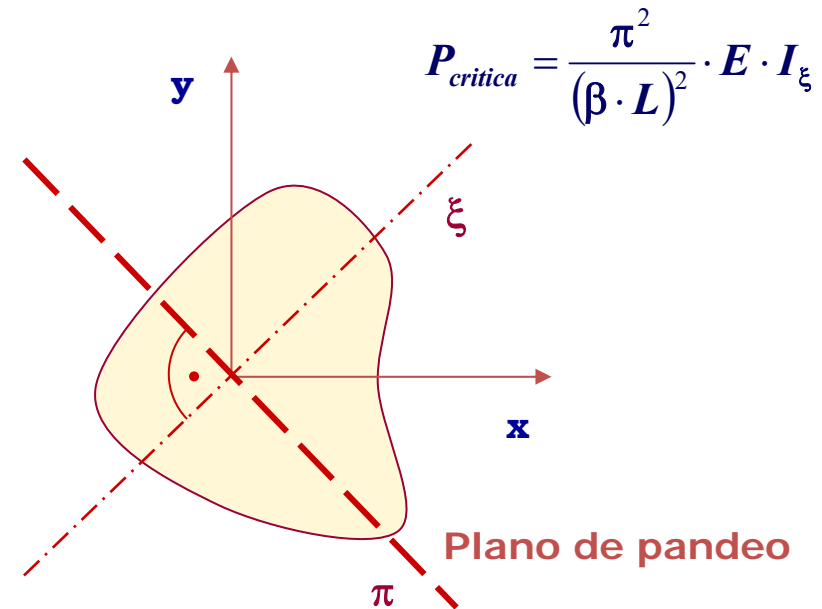
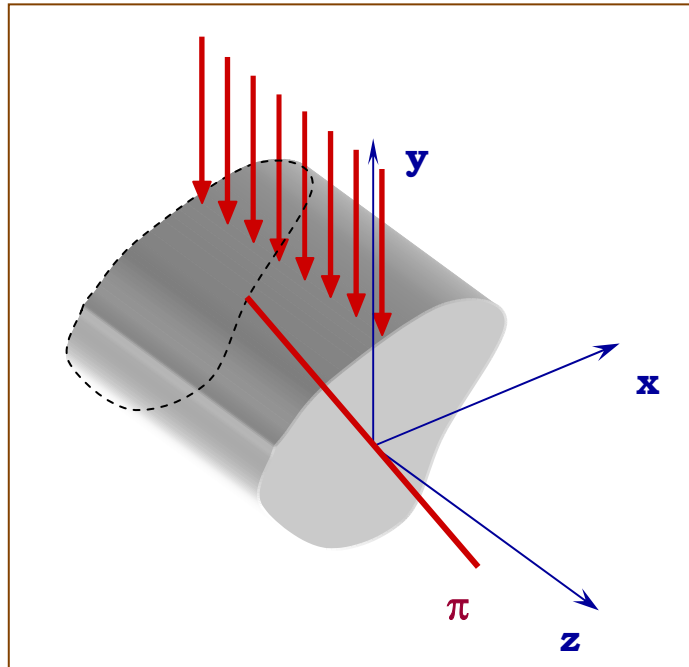
$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{(\beta \cdot L)^2} \cdot E \cdot I$$

Viene fijado en la normativa

Longitud de pandeo:

$$P_{critica} = \frac{\pi^2}{(\beta \cdot L)^2} \cdot E \cdot I = \frac{\pi^2}{L_p^2} \cdot E \cdot I$$

Concepto de esbeltez mecánica



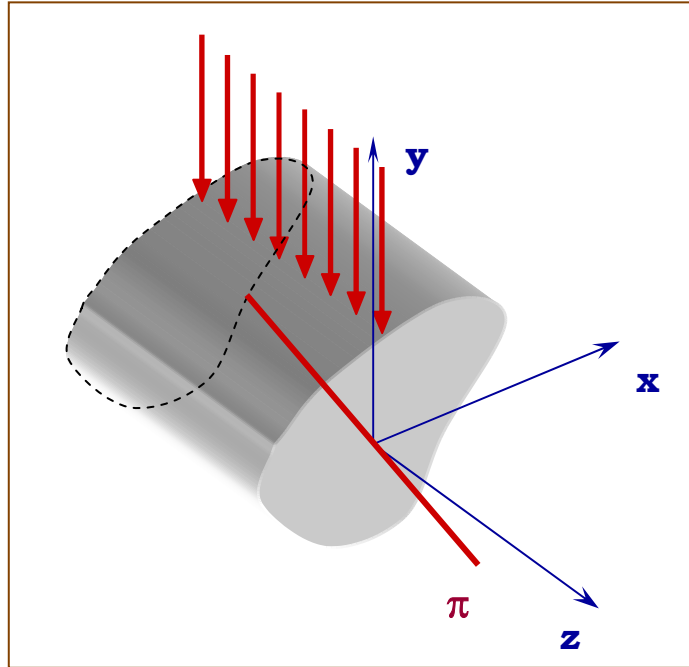
$$i_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}}$$

Radio de giro de la sección respecto al eje ξ

$$\sigma_{critica} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\beta \cdot L}{i_{\xi}}\right)^2}$$

λ_{ξ} : Esbeltez mecánica

Concepto de esbeltez mecánica



$$\lambda_{\xi} = \left(\frac{\beta \cdot L}{i_{\xi}} \right)$$

$$\sigma_{critica} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\xi}^2}$$

A 2D diagram of a cross-section of a beam in the x - y plane. The x and y axes are shown. A dashed line represents the axis of symmetry, labeled ξ . The angle π is indicated between the x and ξ axes. The cross-section is shaded yellow.

La viga pandea en el plano perpendicular al eje de mayor esbeltez mecánica

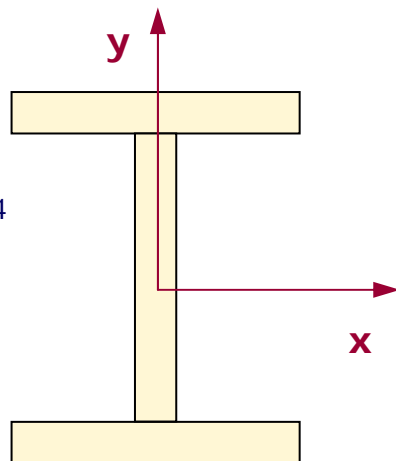
Concepto de esbeltez mecánica

Ejemplo:

Para una viga biapoyada sobre rótulas esféricas, determine la configuración más estable frente a pandeo

$$I_x = 2140 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 117 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

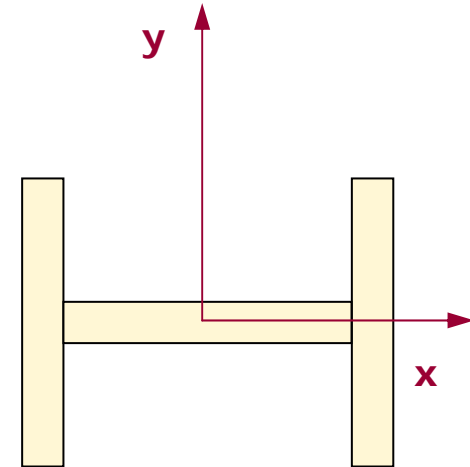


IPN-200

Configuración I

$$I_x = 117 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2140 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

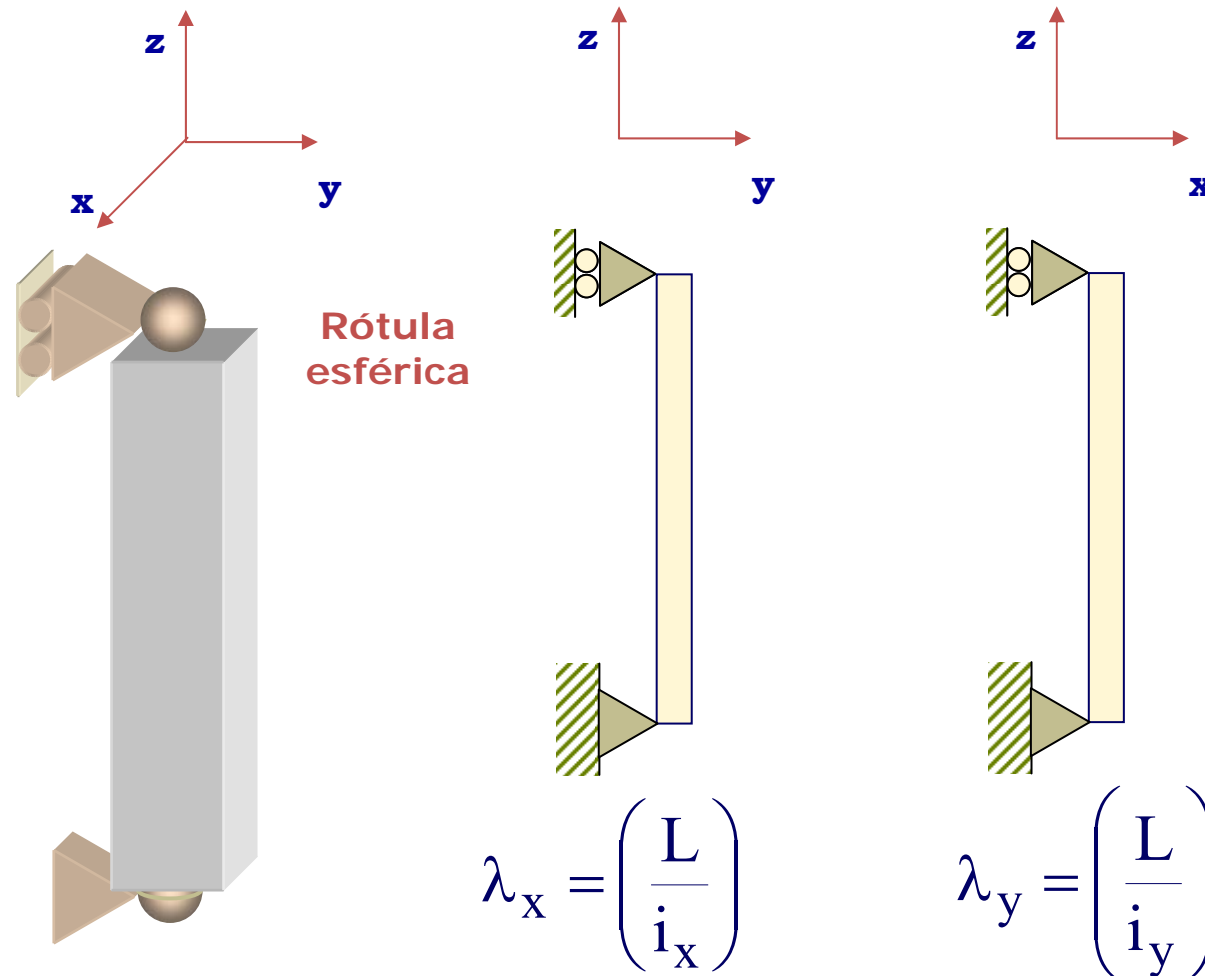


IPN-200

Configuración II

Concepto de esbeltez mecánica

Ejemplo



Concepto de esbeltez mecánica

Ejemplo

Configuración I

$$\lambda_x = \left(\frac{L_p^{yz}}{i_x} \right) = \frac{L}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 12,5 \cdot L$$

$$\lambda_y = \left(\frac{L_p^{xz}}{i_y} \right) = \frac{L}{1,87 \cdot 10^{-2}} = 53,47 \cdot L$$

Pandea respecto al eje x

Configuración II

$$\lambda_x = \left(\frac{L_p^{yz}}{i_x} \right) = \frac{L}{1,87 \cdot 10^{-2}} = 53,47 \cdot L$$

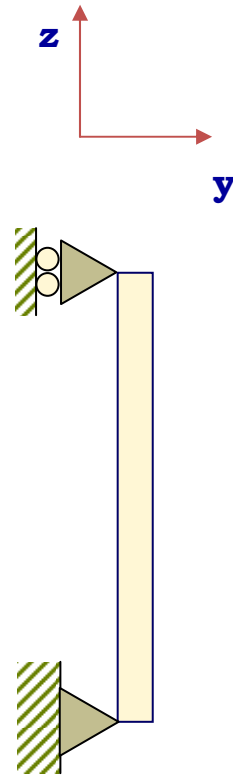
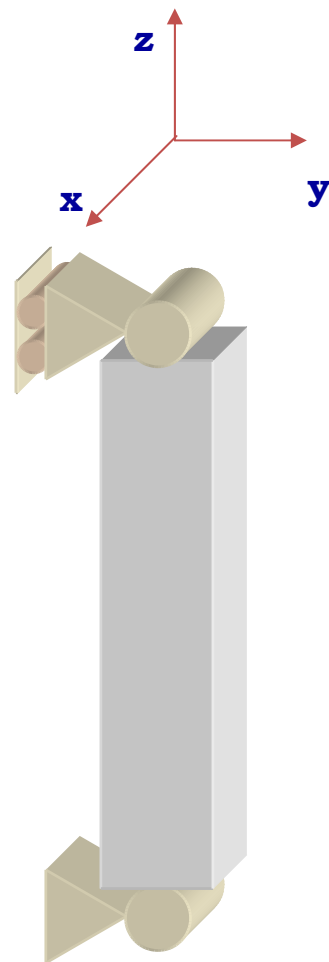
$$\lambda_y = \left(\frac{L_p^{xz}}{i_y} \right) = \frac{L}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 12,5 \cdot L$$

Pandea respecto al eje y

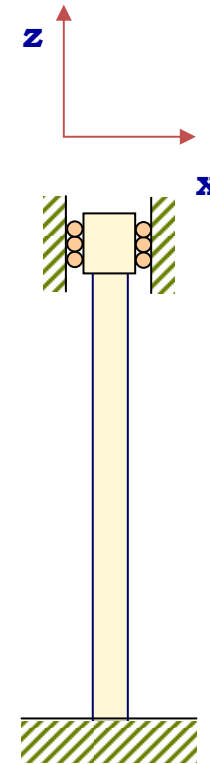
Ambas configuraciones tienen la misma carga crítica

Concepto de esbeltez mecánica

Ejemplo: Repetir los cálculos si las rótulas son cilíndricas



$$\lambda_x = \left(\frac{L}{i_x} \right)$$



$$\lambda_y = \left(\frac{0,5 \cdot L}{i_y} \right)$$

Concepto de esbeltez mecánica

Ejemplo

Configuración I

$$\lambda_x = \left(\frac{L_p^{yz}}{i_x} \right) = \frac{L}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 12,5 \cdot L$$
$$\lambda_y = \left(\frac{L_p^{xz}}{i_y} \right) = \frac{0,5 \cdot L}{1,87 \cdot 10^{-2}} = 26,7 \cdot L$$

Pandea sobre el plano xz

Configuración II

$$\lambda_x = \left(\frac{L_p^{yz}}{i_x} \right) = \frac{L}{1,87 \cdot 10^{-2}} = 53,47 \cdot L$$
$$\lambda_y = \left(\frac{L_p^{xz}}{i_y} \right) = \frac{0,5 \cdot L}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 6,25 \cdot L$$

Pandea sobre el plano yz

La configuración II es más inestable

Material de apoyo

REFERENCIAS COMPLEMENTARIAS

- 1. Celigüeta, J.T. “Curso de Análisis Estructural”**
EUNSA. 1998
Cap 14. Introducción a la estabilidad estructural
- 2. Garrido, J.A. Y Foces, A. “Resistencia de Materiales”.**
Secretariado de Publicaciones. Universidad de Valladolid. 1994
Cap.15 La torsión en los problemas de pandeo
Cap.16 Pandeo global de pórticos planos
- 3. Marti Montrull, P. “Análisis de estructuras. Métodos clásicos y matricial**
Horacio Escarabajal Editores. 2003
Parte 6. Pandeo global de estructuras