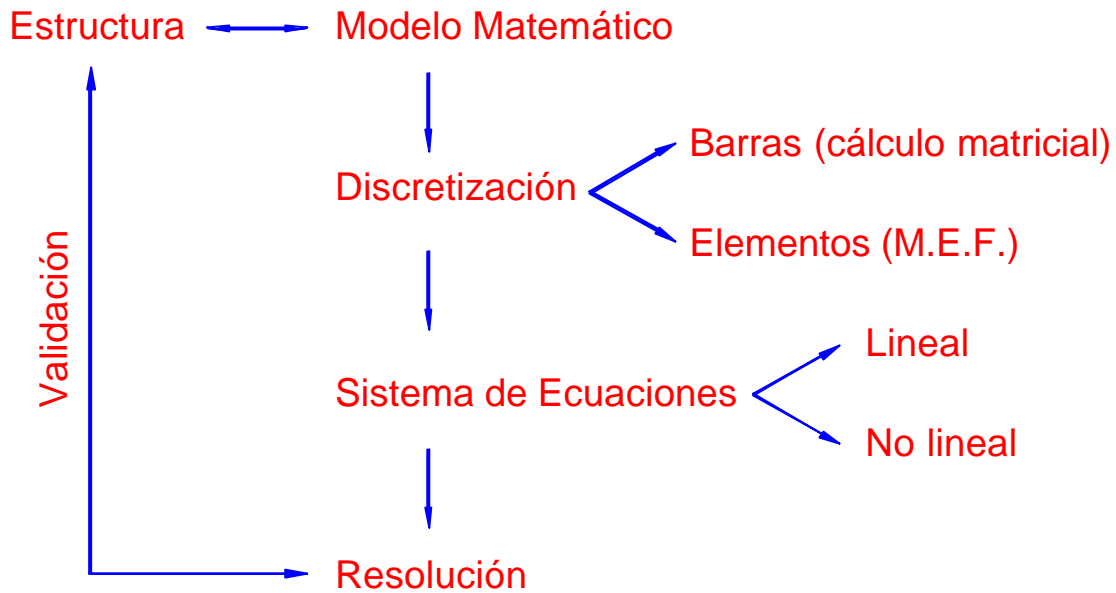


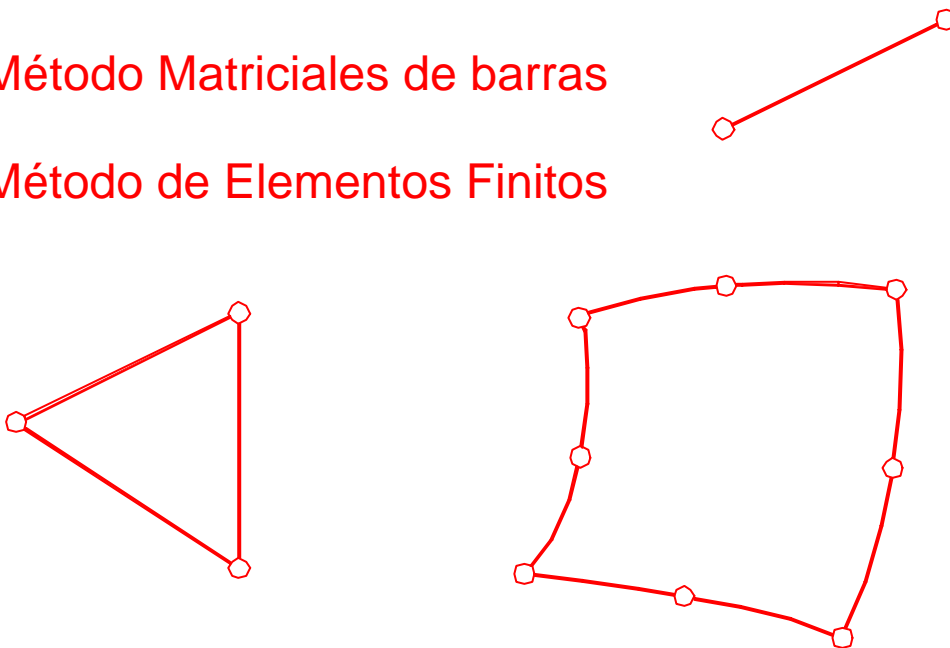
# CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

## MÉTODOS NUMÉRICOS



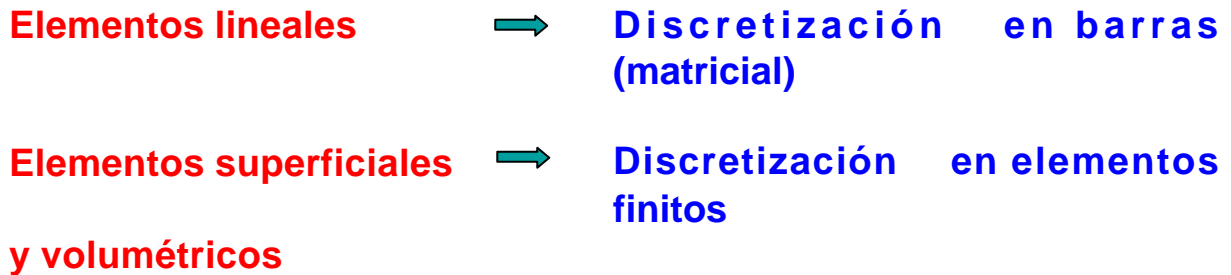
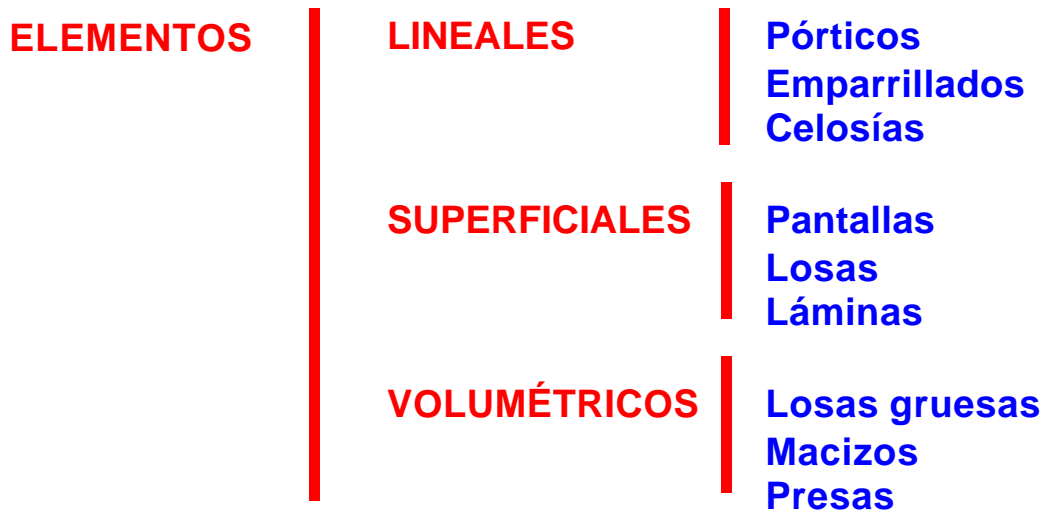
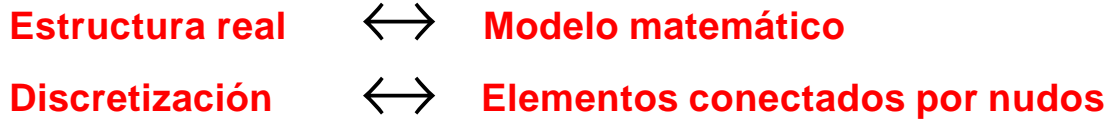
Método Matriciales de barras

Método de Elementos Finitos



# INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO MATRICIAL

## IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA



# IDEALIZACIÓN GEOMÉTRICA

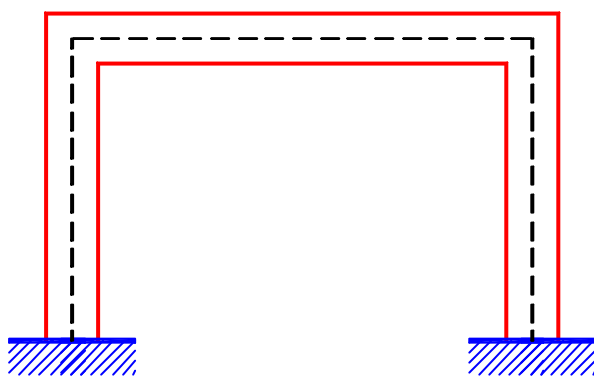
Consiste en la simplificación de las dimensiones y formas de la estructura real.

Se sustituyen las piezas por su directriz, simplificando en los casos de sección variable o directriz curva  $\longrightarrow$  Supone errores.

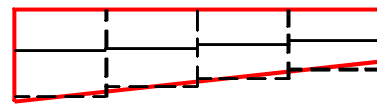
Problemas

Dimensión finita de los nudos

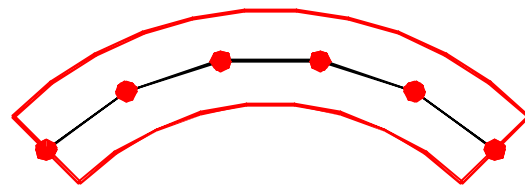
Luces reales de cálculo



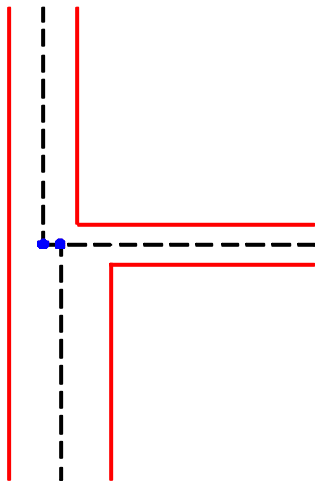
Piezas de Sección Constante



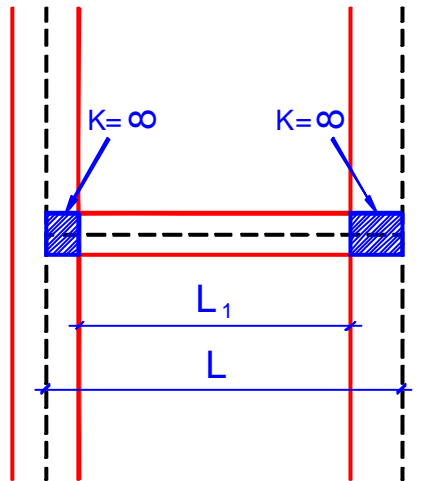
Piezas de Sección Variable



Piezas de Sección Curva

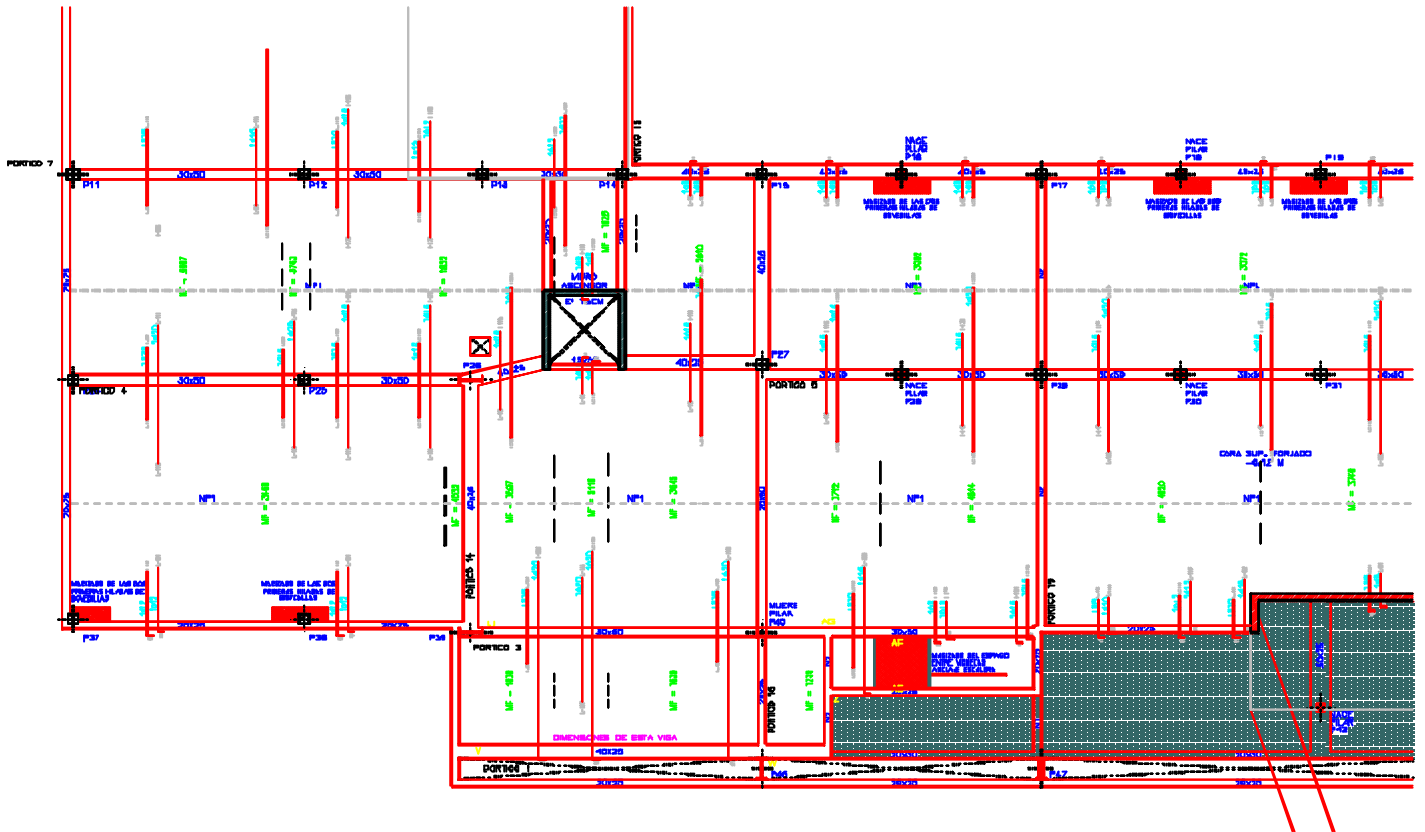


Pilares de distinta sección

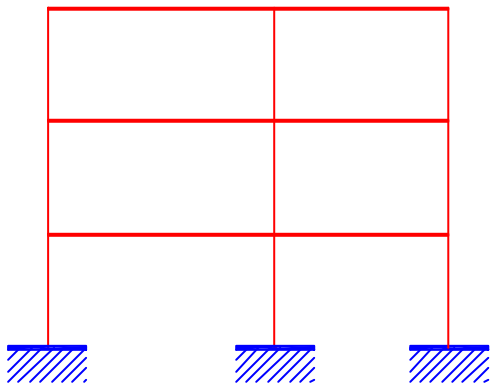


Zonas rígidas de viga

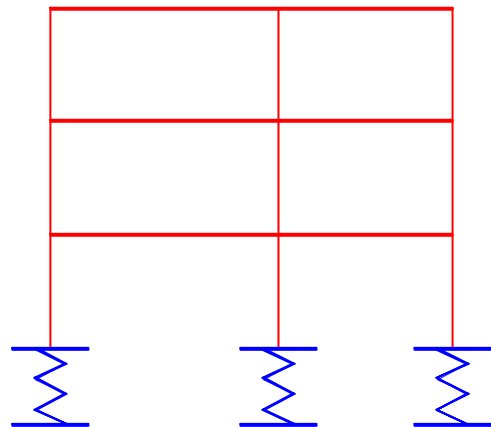
## La idealización geométrica no tiene por qué ser inmediata



En la idealización geométrica deben figurar las condiciones de apoyo, sea rígido o elástico.



Apoyos Rígidos



Apoyos Elásticos

## IDEALIZACIÓN MECÁNICA: ESTRUCTURA.

### ¿ APROXIMACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LA ESTRUCTURA.

Se define por los **DESPLAZAMIENTOS** de los nudos

En el espacio: 3 traslaciones + 3 giros

En el plano: Según el problema

Estructuras articuladas planas: 2 traslaciones

Pórticos planos: 2 traslaciones + 1 giro

Emparrillados planos: 1 traslación + 2 giros.

- Hay que elegir los grados de libertad en función del problema analizado.
- Los desplazamientos se suponen infinitesimales con respecto a las dimensiones de la estructura.
- Si los desplazamientos son grandes se precisa análisis no lineal.

Se analiza a través de las **DEFORMACIONES** de las barras.

Según el problema analizado.

- **Deformación por axil.**  
Importante en estructuras de nudos articulados y pilares de pórticos.
- **Deformación por flexión.**  
Es la más importante en casi todos los casos.
- **Deformación por cortante.**  
Despreciable salvo en casos muy particulares.
- **Deformación por torsión.**  
Sólo importante en emparrillados y pórticos espaciales.

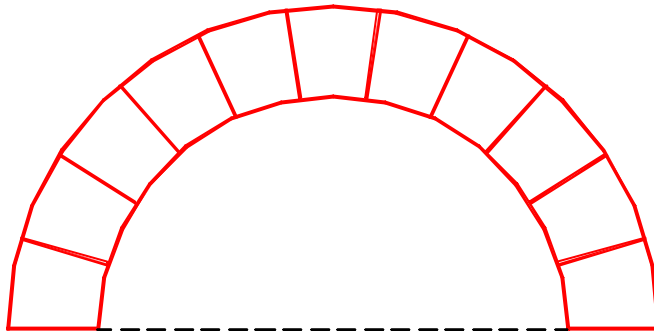
### ¿ TIPOS DE CONEXIÓN ENTRE BARRAS.

Nudo rígido	⇒	Cierto grado de articulación
Nudo articulado	⇒	Cierto grado de empotramiento

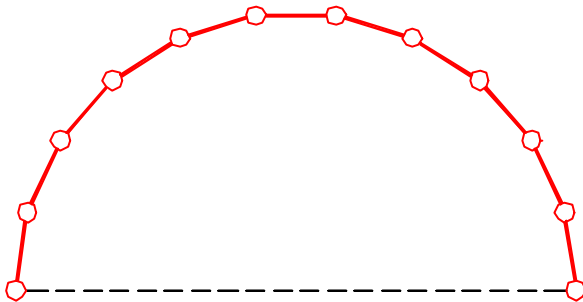
# IDEALIZACIÓN MECÁNICA: ESTRUCTURA.

UNA MISMA ESTRUCTURA ADMITE DIVERSAS MODELIZACIONES CON DISTINTO GRADO DE PRECISIÓN.

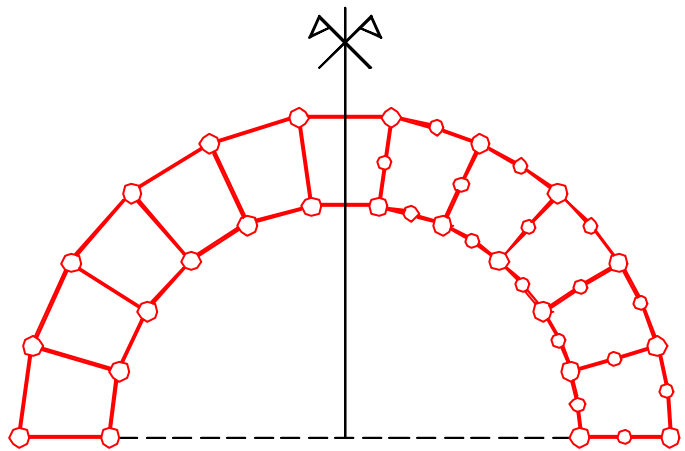
ARCO



Estructura Real



Idealización como Elementos Lineales



Idealización por Elementos Finitos

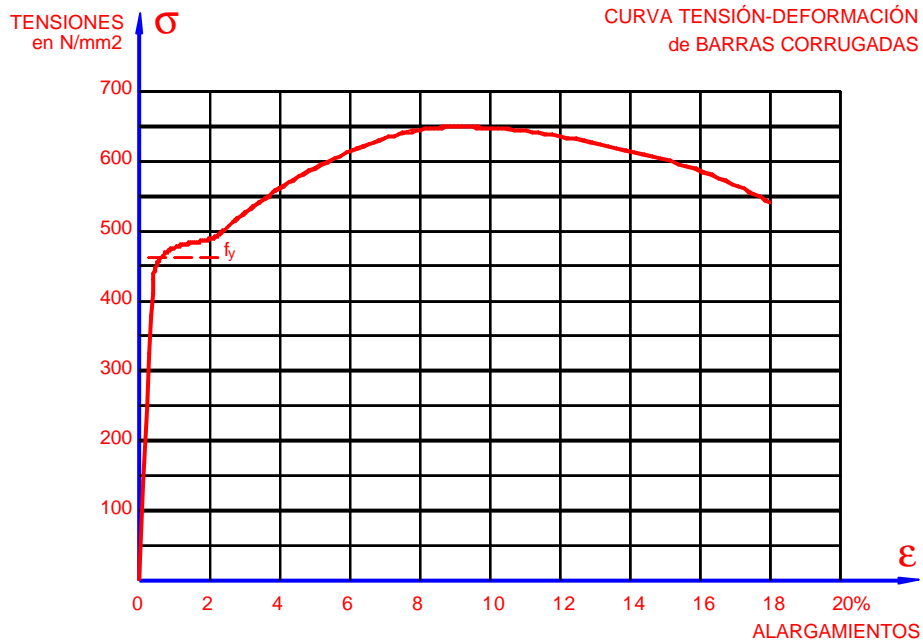
E.F. de 4 nodos

E.F. de 8 nodos

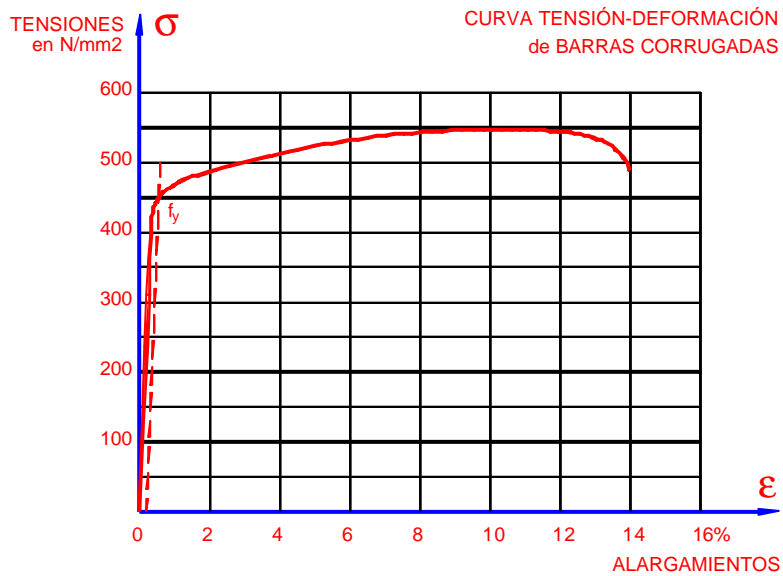
# IDEALIZACIÓN MECÁNICA: MATERIALES

## DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN REALES

### Acero



ACERO DE DUREZA NATURAL



ACERO ESTIRADO en FRÍO

El acero estirado en frío no se utiliza en obra nueva

# Hormigón

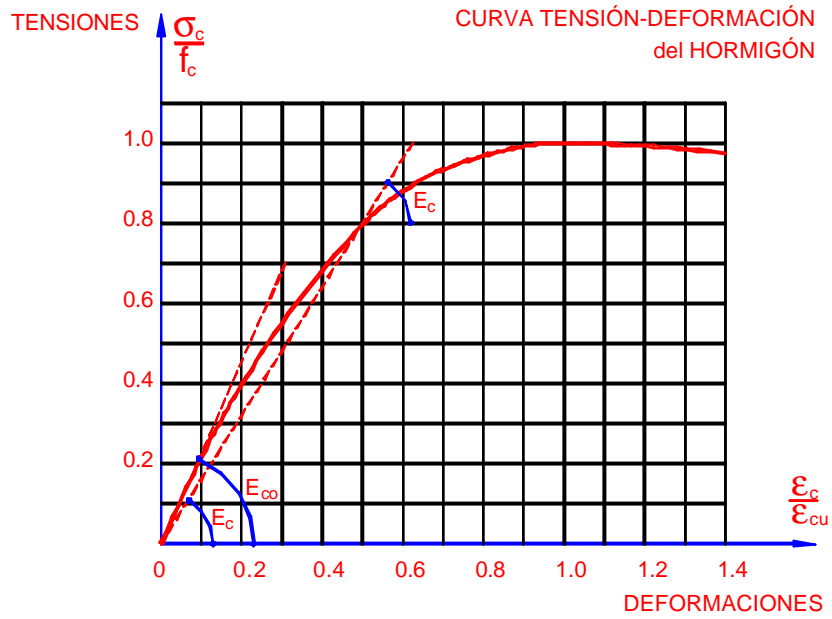


DIAGRAMA NOVAL

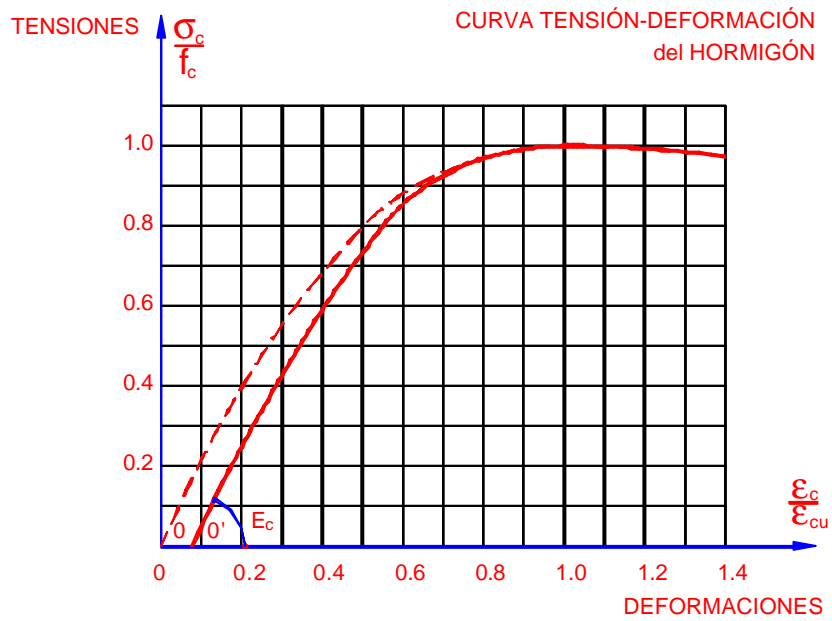


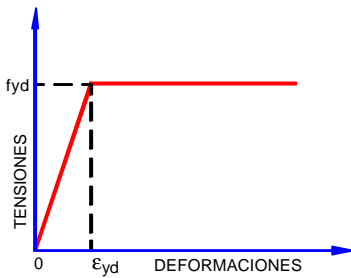
DIAGRAMA con CARGAS REITERADAS



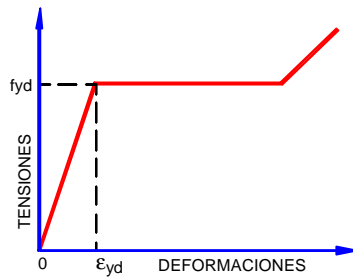
# IDEALIZACIÓN MECÁNICA: MATERIALES

**DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN SIMPLIFICADOS.-** Son necesarios por la excesiva complejidad de los reales.

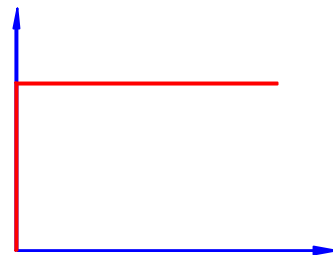
## ACERO ESTRUCTURAL



ELASTO PLÁSTICO

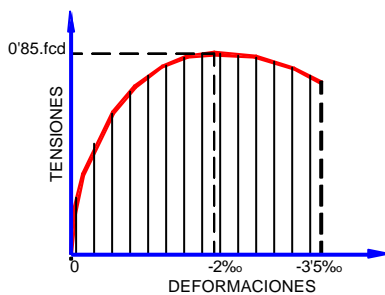


ELASTO PLÁSTICO  
con ENDURECIMIENTO

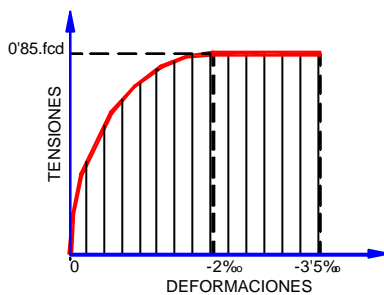


RÍGIDO PLÁSTICO

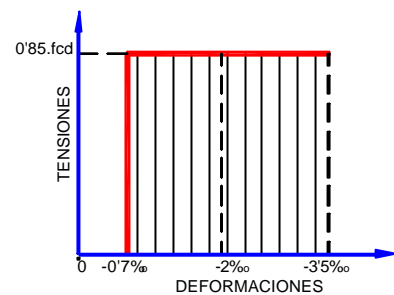
## HORMIGÓN



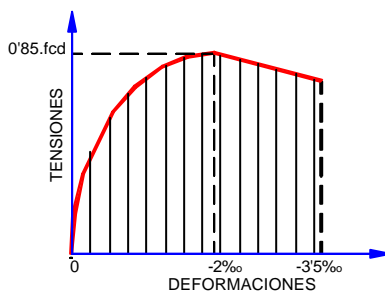
BIPARABOLICO



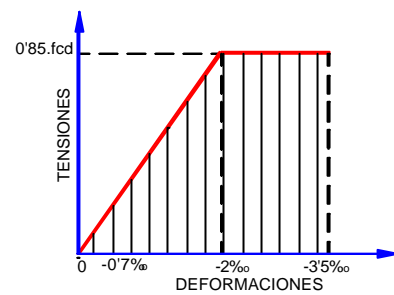
PARABOLA-RECTANGULO



RECTANGULAR



RAMA DECRECIENTE



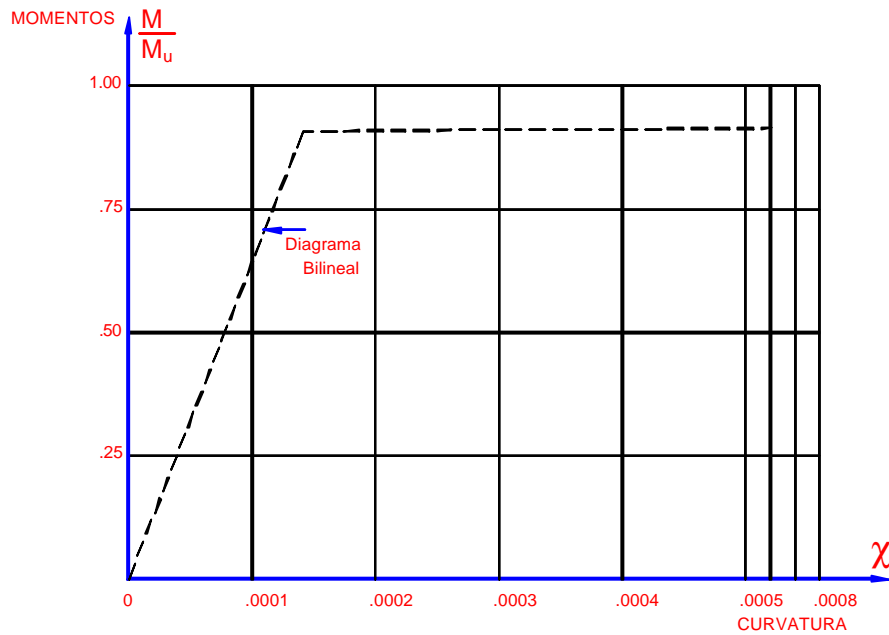
BIRRECTILÍNEO

**Lo más frecuente en considerar el material perfectamente elástico y lineal.**

## IDEALIZACIÓN MECÁNICA: MATERIALES

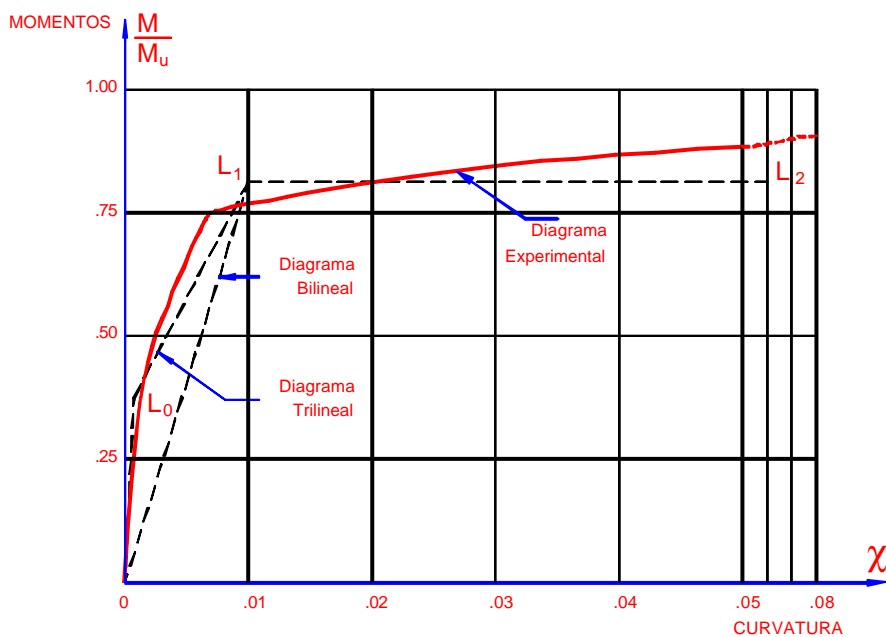
**DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA.-** Son los diagramas que permiten determinar las ecuaciones constitutiva a flexión de las barras. Son fundamentales en el cálculo matricial.

**Acero.- Diagrama bilineal.**



DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA (ACERO)


**Hormigón.- Diagrama trilineal.**



DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA (HORMIGÓN)

## IDEALIZACIÓN DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN

- Propiedades del terreno.
- Interacción cimiento-estructura.

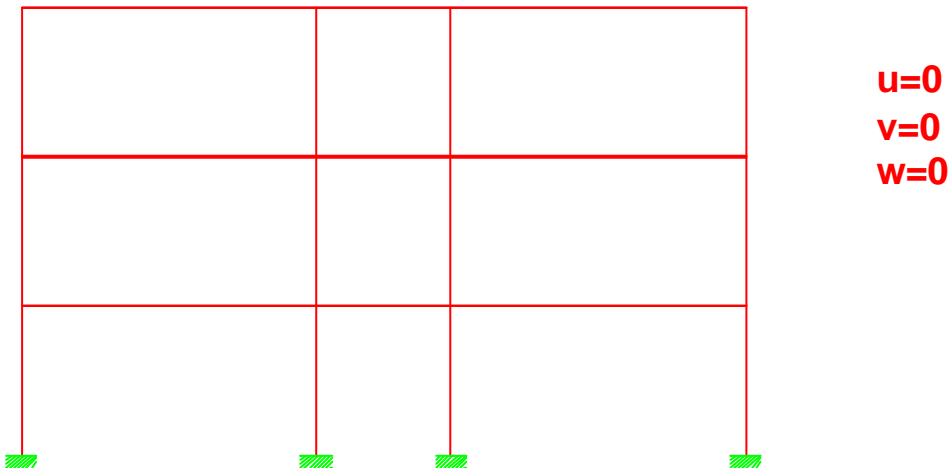
Conexión rígida.  
Conexión elástica  Coeficientes de balasto.

- Problemas de asientos diferenciales.

Grandes momentos en los dinteles.

- Problemas de giros de la cimentación.
- Influencia de las zapatas de medianería y de esquina.

Generalmente se considera la estructura rígidamente empotrada en la base.



En cálculo matricial es muy fácil introducir deformaciones impuestas en los vínculos a condición de que puedan expresarse directamente en coordenadas globales.

## **BASES DEL CÁLCULO MATRICIAL.**

### **1.- Desarrollo histórico.**

#### **C Planteamientos iniciales (1850- 1875)**

**Maxwell.**

**Castigliano.**

**Mohr.**

**(No progresaron por la dificultad de resolver grandes sistemas de ecuaciones)**

#### **C Planteamiento general del método (1915- 1926)**

**Maney (USA)**

**Ostenfeld (Dinamarca)**

#### **C Método iterativo de Hardy Cross (1932)**

#### **C Formulación matricial actual (1944)**

**G. Kron “Tensorial analysis of elastic structures”**

#### **C Método de elementos finitos.**

**Turner**

**Clough**

#### **C Desarrollo y generalización del uso de los ordenadores**

## SUPUESTOS PREVIOS.

- **Linearidad.**- Los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas aplicadas.

**Ventajas**

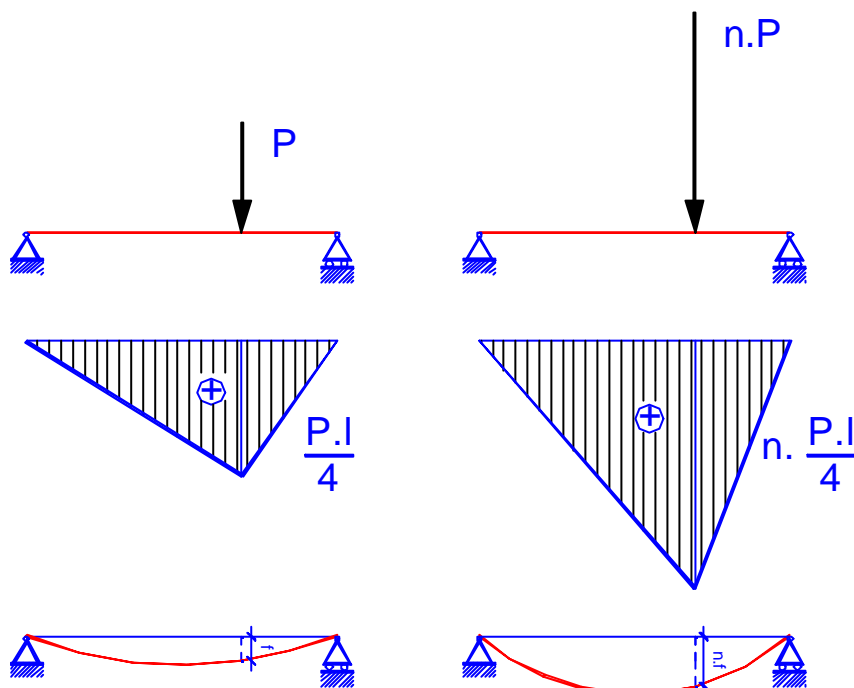
Simplifica el análisis

Permite la superposición de soluciones

**Condiciones**

Materiales elásticos

Desplazamientos pequeños



- **Superposición.**- Los esfuerzos y movimientos que produce un conjunto de sistemas de carga actuando a la vez es igual a la suma de los que producirían actuando por separado.

En cálculo matricial es fundamental este principio de superposición, puesto que en general hemos de superponer dos estados:

- ⊆ Estado de empotramiento perfecto
- ⊆ Estado final de cálculo.

## MÉTODOS MATRICIALES.

En estructuras la relación determinista

**CAUSA**  $\leftrightarrow$  **EFEECTO**

se establece como

**FUERZA**  $\leftrightarrow$  **MOVIMIENTO**

Es una relación biunívoca que debe satisfacer:

- 1.- Ecuaciones constitutivas del material  $\rightarrow$  Ley de Hooke
- 2.- Ecuaciones de compatibilidad
- 3.- Ecuaciones de equilibrio

**ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS**  $\rightarrow$  Ecuación 3

**ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS**  $\rightarrow$  Ecuaciones 1,2, 3

Lo que diferencia los métodos matriciales es el **ORDEN** de utilización de las ecuaciones

**MÉTODO DE EQUILIBRIO  
O DE RIGIDEZ**

1  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  3

**MÉTODO DE LAS FUERZAS  
O DE FLEXIBILIDAD**

1  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  2

## MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

INCÓGNITAS BÁSICAS  $\longrightarrow$  FUERZAS HIPERESTÁTICAS

DATOS  $\longrightarrow$  FUERZAS EN LOS NUDOS

### APLICACIÓN DEL MÉTODO

1.- Expresar las deformaciones en función de los esfuerzos en los extremos de las barras. (Ecuación constitutiva).

2.- Expresar los esfuerzos en los extremos de las barras en función de las incógnitas hiperestáticas y de las fuerzas exteriores conocidas. (Ecuación de equilibrio).

3.- Aplicar las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones. (Ecuación de compatibilidad).

SE GENERA UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

$$X = T \cdot L$$

X = matriz de deformaciones

T = matriz de flexibilidad en coordenadas globales

L = matriz incógnita (fuerzas hiperestáticas)

RESOLUCIÓN  $L = T^{-1} \cdot X$   $\longrightarrow$  Fuerzas hiperestáticas



Se aplica 2  $\longrightarrow$  Esfuerzos en barras



Se aplica 1  $\longrightarrow$  Deformaciones

## MÉTODO DE RIGIDEZ

INCÓGNITAS BÁSICAS → MOVIMIENTOS EN LOS NUDOS

DATOS → FUERZAS EN LOS NUDOS

## APLICACIÓN DEL MÉTODO

1.- Expresar las esfuerzos en los extremos de las barras en función de los movimientos en dichos extremos. (Ecuación constitutiva).

2.- Aplicar las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones. Se ponen los movimientos de los extremos de las barras (coordenadas locales) en función de los movimientos de los nudos (coordenadas globales). (Ecuación de compatibilidad).

3.- Aplicar las ecuaciones de equilibrio de nudos. (Ecuación de equilibrio).

## SE GENERA UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

$$L = S \cdot X$$

L = matriz de cargas en los nudos

S = matriz de rigidez en coordenadas globales

X = matriz incógnita (desplazamientos en los nudos)

RESOLUCIÓN  $X = S^{-1} \cdot L$  → Desplazamientos en coord. globales



Se aplica 2 → Desplazamientos en coord. locales

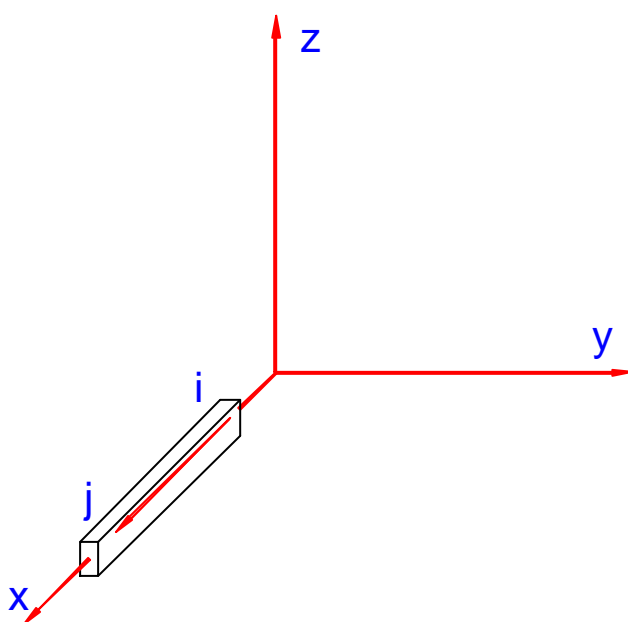
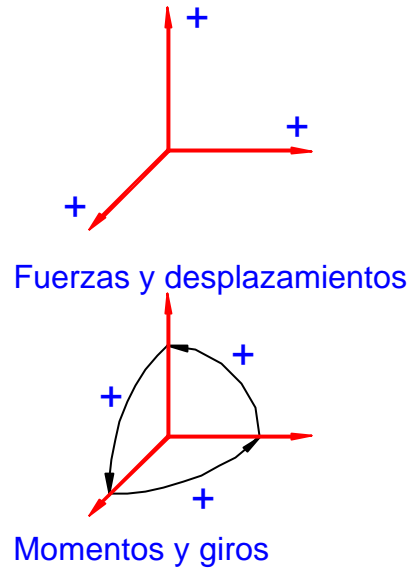
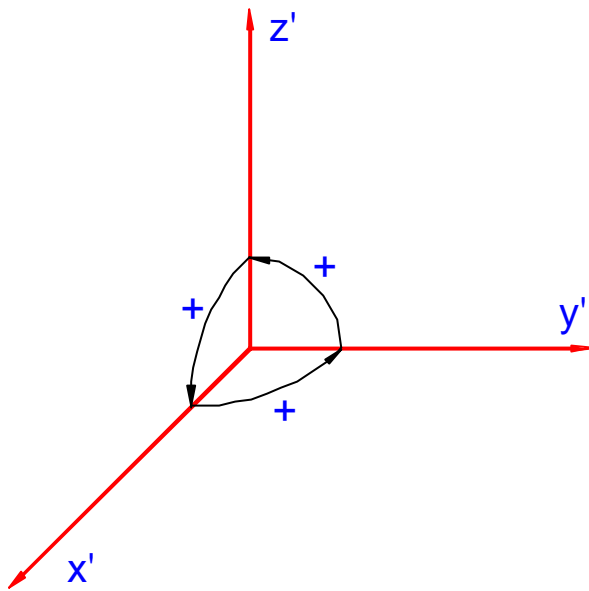


Se aplica 1 → Esfuerzos



## SISTEMAS DE REFERENCIA Y CONVENIOS DE SIGNOS

### SISTEMA DE COORDENADAS GLOBALES SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES



Eje  $x$  Directriz de la barra  
Ejes  $y, z$  Ejes principales de inercia de la sección

DATOS DE LA BARRA  
 $L, A, I_y, I_z, I_T$   
 $\alpha, \beta, \gamma$   
(ángulos con ejes globales)

## CAMBIOS DE SISTEMAS DE REFERENCIA

Para resolver una estructura es preciso cambiar las variables de coordenadas locales a globales y viceversa  $\rightarrow$  **m a t r i z d e transformación**

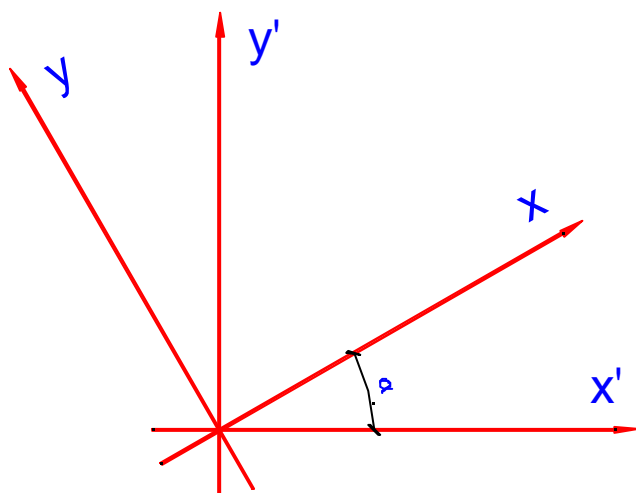
**O'x'y'z'**                      **Sistema global**  
**O x y z**                        **Sistema local**

## CAMBIO DE EJES

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x' \cdot x & x' \cdot y & x' \cdot z \\ y' \cdot x & y' \cdot y & y' \cdot z \\ z' \cdot x & z' \cdot y & z' \cdot z \end{pmatrix}}_{\text{cosenos directores}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

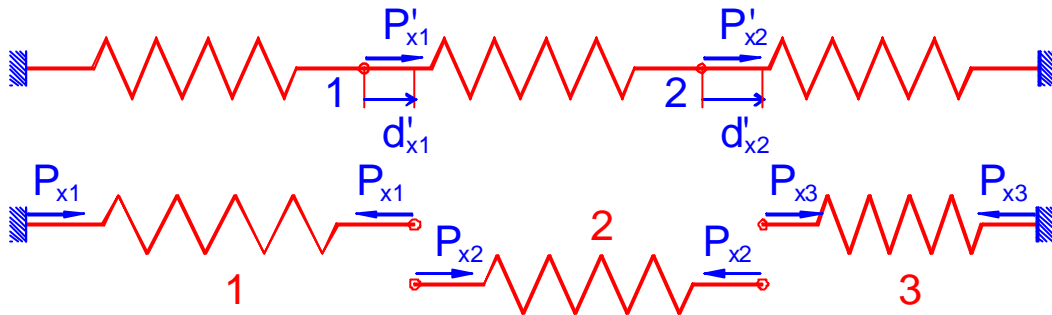
En forma matricial            **X' = D . X**

Generalmente el cambio de ejes es una rotación. En el plano



$$D = \begin{pmatrix} \cos a & -\text{sen } a & 0 \\ \text{sen } a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## CÁLCULO MATRICIAL: PRINCIPIOS GENERALES.



**Ecuación constitutiva**  $\rightarrow$  relaciona los esfuerzos con los desplazamientos  $\rightarrow$  **Coord. locales**

$$\left. \begin{aligned} P_{x1} &= k_1 \cdot d_{x1} \\ P_{x2} &= k_2 \cdot d_{x2} \\ P_{x3} &= k_3 \cdot d_{x3} \end{aligned} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \\ P_{x3} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \\ d_{x3} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}}$$

**P** = matriz de fuerzas internas

**K** = matriz de rigidez

**d** = matriz de desplazamientos de elementos

**Ecuación de compatibilidad**  $\rightarrow$  relaciona los desplazamientos de elementos (coordenadas locales) con los de los nudos (coordenadas globales)

$$\left. \begin{aligned} d_{x1} &= d'_{x1} - 0 \\ d_{x2} &= d'_{x2} - d'_{x1} \\ d_{x3} &= 0 - d'_{x2} \end{aligned} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \\ d_{x3} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d'_{x1} \\ d'_{x2} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}'}$$

**A** = matriz de compatibilidad

**d'** = matriz de desplazamientos de nudos

**Ecuación de equilibrio** → las fuerzas externas has de equilibrarse co las fuerzas internas (coordenadas globales)

$$\left. \begin{aligned} P'_{x1} &= P_{x1} - P_{x2} \\ P'_{x2} &= P_{x2} - P_{x3} \end{aligned} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} P'_{x1} \\ P'_{x2} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \\ P_{x3} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}}$$

**P'** = matriz de fuerzas exteriores  
**A<sup>t</sup>** = Matriz traspuesta de A

Se formulan tres ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{K} \cdot \tilde{d} && \text{Ecuacion constitutiva} \\ \tilde{d} &= \tilde{A} \cdot \tilde{d}' && \text{Ecuacion de compatibilidad} \\ \tilde{P}' &= \tilde{A}^t \cdot \tilde{P} && \text{Ecuacion de equilibrio} \end{aligned}$$

Proceso

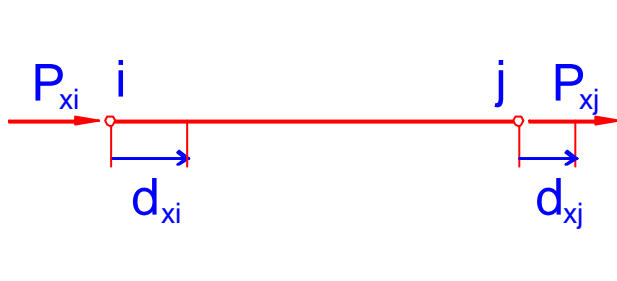
$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \tilde{P}' = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P} \\ 2 &\rightarrow \tilde{P}' = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{d} \\ 3 &\rightarrow \tilde{P}' = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}' \rightarrow \tilde{P}' = \tilde{S} \cdot \tilde{d}' \end{aligned}$$

$\tilde{P}' = \tilde{S} \cdot \tilde{d}'$  Expresa la ecuación matricial en coordenadas globales de la estructura completa.

## ECUACIÓN CONSTITUTIVA

- Ⓒ Expresa la relación entre los esfuerzos sobre un elemento y los desplazamientos de dicho elemento. Para materiales elásticos es la ley de Hooke.
- Ⓒ Al referirse a cada elemento se formula en coordenadas locales.
- Ⓒ Su grado de complejidad depende del número de esfuerzos que definan el estado de la barra.

ESTRUCTURAS ARTICULADAS → Sólo esfuerzo axial



$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{xj} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & -\frac{E \cdot A}{l} \\ -\frac{E \cdot A}{l} & \frac{E \cdot A}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}}$$

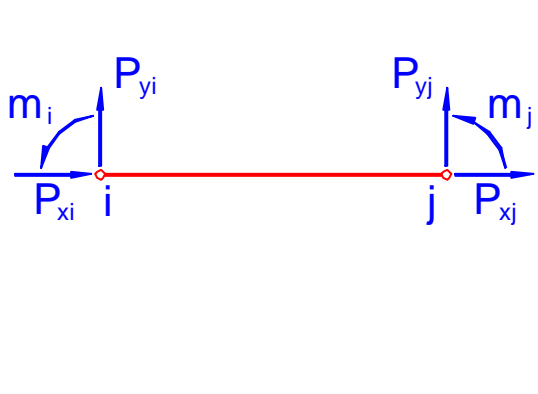
Puesto en forma matricial

$$P_{xi} = -P_{xj}$$

$$El = d_{xj} - d_{xi} = \frac{P_{xj} \cdot l}{E \cdot A}$$

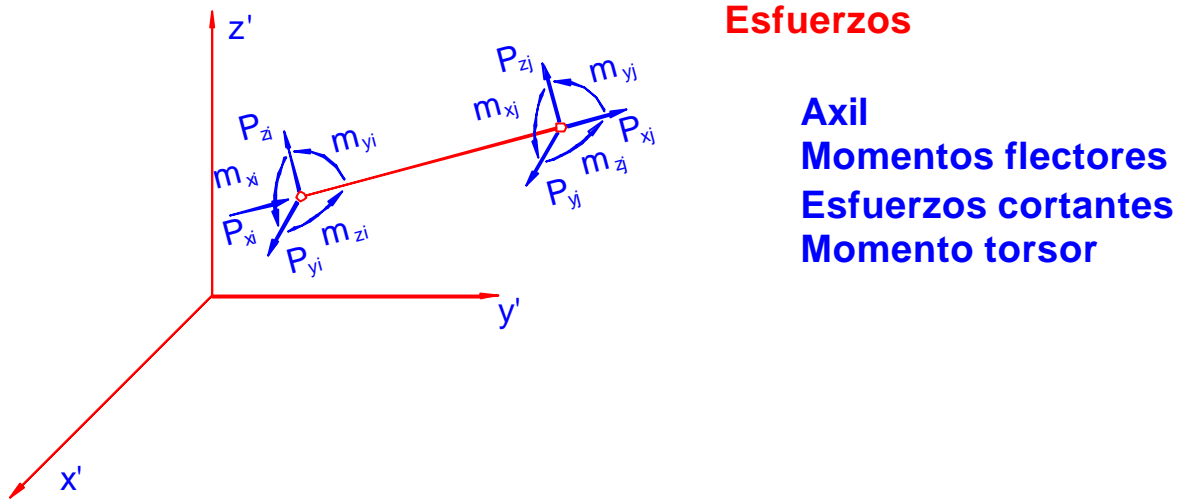
$$P_{xj} = -P_{xi} = \frac{E \cdot A}{l} (d_{xj} - d_{xi})$$

ESTRUCTURAS RETICULADAS → Axil, cortante y flector



$$\begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ m_i \\ P_{xj} \\ P_{yj} \\ m_j \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ q_i \\ d_{xj} \\ d_{yj} \\ q_j \end{pmatrix}$$

## CÁLCULO DE LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA POR MEDIO DE LA MATRIZ DE FLEXIBILIDAD



La matriz de flexibilidad relaciona los desplazamientos del elemento con sus esfuerzos  $\longrightarrow$  Inversa de la matriz de rigidez.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} \quad (\text{rigidez}) \\ \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \quad (\text{Flexibilidad}) \end{array} \right\} \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1}$$

La ventaja de este método es que la matriz de flexibilidad puede obtenerse siempre por simple aplicación del teorema de Castigliano.

### Energía elástica del elemento

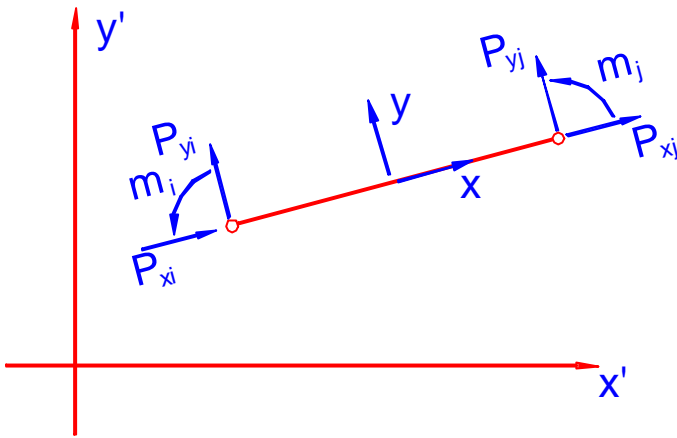
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{E \cdot A} + \frac{M^2}{E \cdot I} + \frac{V^2}{G \cdot A_e} + \frac{M_T^2}{G \cdot J} \right) \cdot dx$$

Derivando la energía elástica con respecto a cada esfuerzo se puede obtener el desplazamiento correspondiente.

$$d_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \Rightarrow \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

E invirtiendo la matriz de flexibilidad se obtiene la matriz de rigidez.

## ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD.



Los esfuerzos internos llevan la dirección de los ejes locales.

Las fuerzas externas llevan la dirección de los ejes globales.

Las leyes de cambio de coordenadas son las mismas que para ejes.

Se trata de una rotación de ejes de ángulo  $\alpha$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}'}}$$

Para los esfuerzos

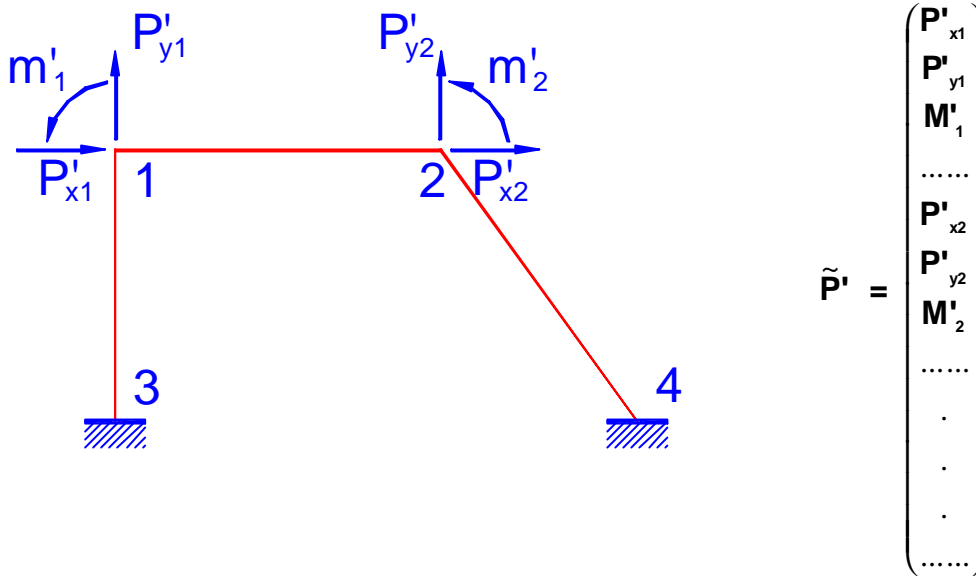
$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} P_x' \\ P_y' \\ m' \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}'}}$$

Para los desplazamientos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ q \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_x' \\ d_y' \\ q' \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}'}}$$

Las mismas relaciones pueden generalizarse para cualquier sistema de coordenadas.

## ECUACIÓN DE EQUILIBRIO



Estructura cualquiera con cargas en los nudos

Fuerzas exteriores  $\longleftrightarrow$  Fuerzas interiores  
se equilibran

Fuerzas  $\tilde{P}' \leftrightarrow \tilde{P}$   
Desplazamientos  $\underbrace{\tilde{d}'}_{\text{exteriores}} \leftrightarrow \underbrace{\tilde{d}}_{\text{internas}}$

Aplicando el principio de trabajos virtuales

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_i P'_i \cdot d'_i}_{\text{trabajo fuerzas externas}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_j P_j \cdot d_j}_{\text{trabajo fuerzas internas}}$$

En forma matricial  $\tilde{P}'^t \cdot \tilde{d}' = \tilde{P}^t \cdot \tilde{d}$

Aplicando la ecuación de compatibilidad  $\tilde{d} = \tilde{A} \cdot \tilde{d}'$

$$\tilde{P}'^t \cdot \tilde{d}' = \tilde{P}^t \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}' \Rightarrow \tilde{P}'^t = \tilde{P}^t \cdot \tilde{A}$$

Y trasponiendo esta ecuación

Ecuación de equilibrio

$$\tilde{P}' = \tilde{A} \cdot \tilde{P}$$



# PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CÁLCULO MATRICIAL

Ecuación constitutiva  $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$

Ecuación de compatibilidad  $\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$

Ecuación de equilibrio  $\tilde{\mathbf{P}}' = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

multiplicando a la izquierda por  $\mathbf{A}^t$

$$\underbrace{\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{P}}'} = \underbrace{\mathbf{A}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}_{\tilde{\mathbf{S}}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}' \Rightarrow \tilde{\mathbf{P}}' = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

## Sistema lineal de ecuaciones

n datos  $\longrightarrow$  Fuerzas en los nudos  
 n incógnitas  $\longrightarrow$  Desplazamientos en los nudos

El problema se reduce a resolver un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, por cualquiera de los métodos matemáticos disponibles.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} & \dots & \mathbf{s}_{1n} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & \mathbf{s}_{23} & \dots & \mathbf{s}_{2n} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} & \dots & \mathbf{s}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{s}_{n1} & \mathbf{s}_{n2} & \mathbf{s}_{n3} & \dots & \mathbf{s}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

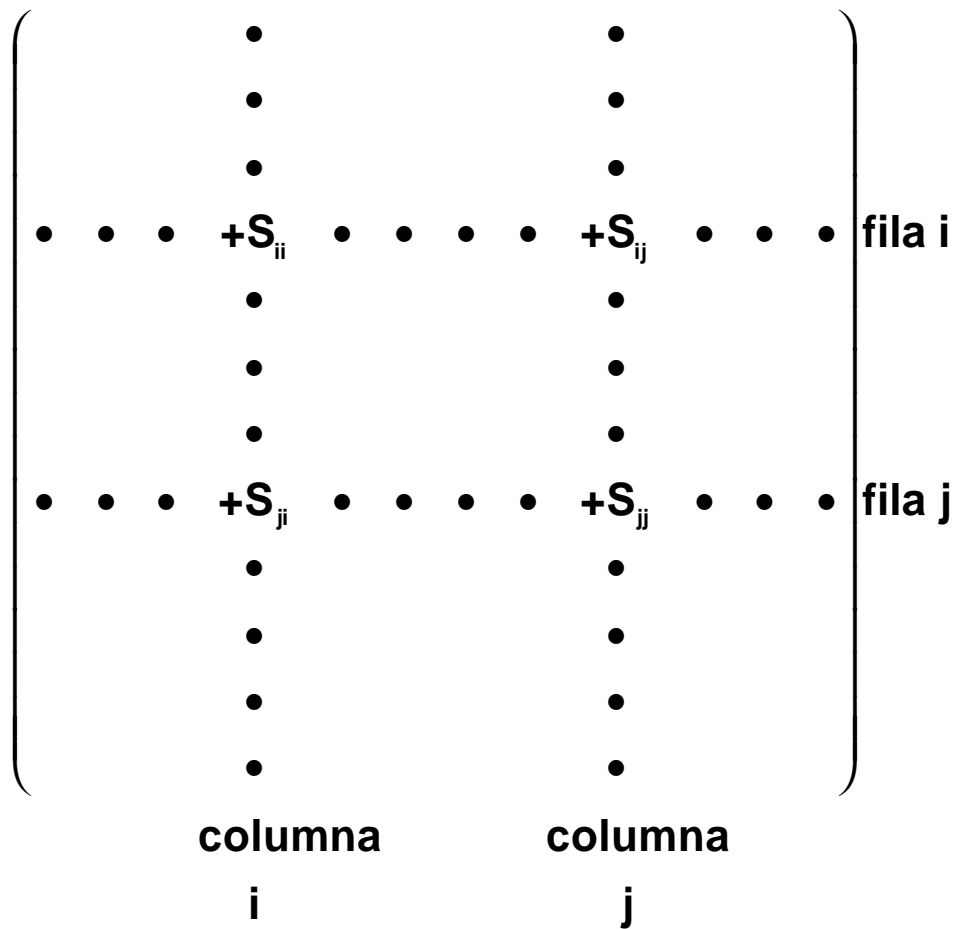
Una vez resuelto el sistema se conocen los desplazamientos de los nudos en coordenadas globales.

# ENSAMBLAJE POR BLOQUES

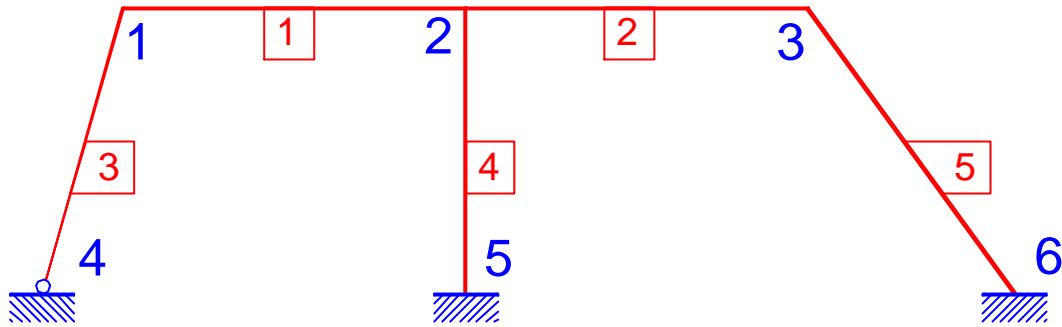
Matriz de un elemento  Coordenadas globales

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}'_i \\ \tilde{P}'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{ii} & \tilde{S}_{ij} \\ \tilde{S}_{ji} & \tilde{S}_{jj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{d}'_i \\ \tilde{d}'_j \end{pmatrix}$$

Situación en la matriz de rigidez de la totalidad de la estructura



## EJEMPLO DE ENSAMBLAJE POR BLOQUES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA



$$\begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \\ P'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^1 + S_{11}^3 & S_{12}^1 & 0 & S_{14}^3 & 0 & 0 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 + S_{22}^2 + S_{22}^4 & S_{23}^2 & 0 & S_{25}^4 & 0 \\ 0 & S_{32}^2 & S_{33}^2 + S_{33}^5 & 0 & 0 & S_{36}^5 \\ S_{41}^3 & 0 & 0 & S_{44}^3 & 0 & 0 \\ 0 & S_{52}^4 & 0 & 0 & S_{55}^4 & 0 \\ 0 & 0 & S_{63}^5 & 0 & 0 & S_{66}^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En los nudos 5 y 6 los tres desplazamientos son nulos al tratarse de empotramientos. Pueden eliminarse del sistema de ecuaciones.

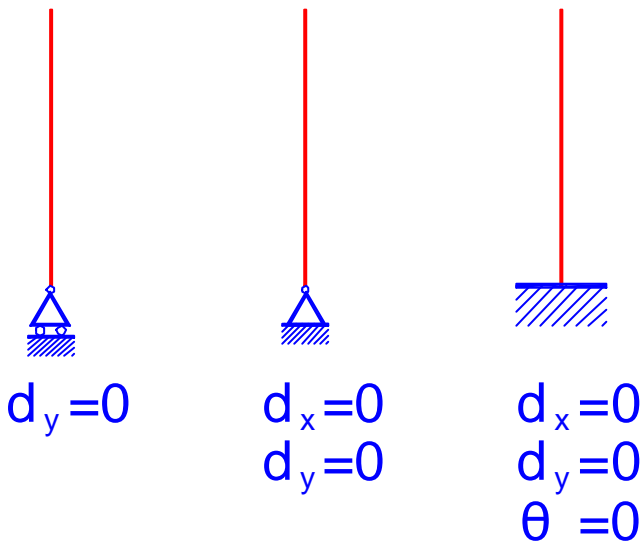
El nudo 4 tiene dos desplazamientos nulos (articulaciones). Las filas correspondientes a esos desplazamientos también pueden eliminarse.

## EFFECTO DE LOS VÍNCULOS.

Una vez efectuado el ensamblaje de matrices se obtiene un sistema lineal de ecuaciones del tipo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} & \dots & \mathbf{s}_{1n} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & \mathbf{s}_{23} & \dots & \mathbf{s}_{2n} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} & \dots & \mathbf{s}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{s}_{n1} & \mathbf{s}_{n2} & \mathbf{s}_{n3} & \dots & \mathbf{s}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

La existencia de un vínculo supone un desplazamiento conocido. La ecuación correspondiente a esa incógnita no necesita ser resuelta.



### Desplazamientos nulos

Son ecuaciones que pueden eliminarse del sistema. En la práctica es mucho más simple formar la ecuación pero saltarla a la hora de resolver el sistema.

### Desplazamientos conocidos pero no nulos

Es preciso modificar la matriz de rigidez global.

Supongamos conocido el valor de  $x_2$

$$x_2 = b$$

Métodos de resolución  $\longrightarrow$

Resolución directa  
Factores de penalización

**Método de resolución directa.-** Se modifica el sistema de ecuaciones en forma tal que mantenga la simetría.

$$\begin{pmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{31} & 0 & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{n1} & 0 & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - s_{12}\beta \\ \beta \\ p_3 - s_{32}\beta \\ \vdots \\ p_n - s_{n2}\beta \end{pmatrix}$$

Si hay más desplazamientos conocidos se repite este proceso las veces que haga falta.

**Método de los factores de penalización.-** Se modifica el sistema de ecuaciones utilizando un factor de penalización muy grande, por ejemplo  $10^{10}$ .

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} \cdot 10^{10} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \cdot 10^{10} \cdot \beta \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Si dividimos la segunda ecuación por  $s_{22} \cdot 10^{10}$  obtendremos

$$\frac{s_{21}}{s_{22}} \cdot 10^{-10} \cdot x_1 + x_2 + \frac{s_{23}}{s_{22}} \cdot 10^{-10} \cdot x_3 + \dots + \frac{s_{2n}}{s_{22}} \cdot 10^{-10} \cdot x_n = \beta$$

Que es prácticamente equivalente a  $x_2 = \beta$  que es la ecuación del desplazamiento impuesto

## **RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES**

**Métodos directos.-** Son algoritmos que proporcionan una solución exacta del sistema tras un número finito de operaciones.

- Ⓒ Método de Gauss**
- Ⓒ Método de Gauss-Jordan**
- Ⓒ Método frontal**
- Ⓒ Método de Cholesky**

**Método iterativos.-** Son algoritmos que suponen una solución inicial inexacta que va convergiendo a la solución exacta por aproximaciones sucesivas.

- Ⓒ Método de Jacobi**
- Ⓒ Método de Gauss-Seidel**
- Ⓒ Método de gradientes conjugados**

**El problema principal de los métodos iterativos es asegurar la convergencia de la solución en un número finito de pasos.**

## MÉTODO DE GAUSS

$$\begin{array}{l}
 S_{11} \cdot X_1 + S_{12} \cdot X_2 + S_{13} \cdot X_3 + \dots + S_{1n} \cdot X_n = p_1 \\
 S_{21} \cdot X_1 + S_{22} \cdot X_2 + S_{23} \cdot X_3 + \dots + S_{2n} \cdot X_n = p_2 \\
 S_{31} \cdot X_1 + S_{32} \cdot X_2 + S_{33} \cdot X_3 + \dots + S_{3n} \cdot X_n = p_3 \\
 \vdots \\
 S_{n1} \cdot X_1 + S_{n2} \cdot X_2 + S_{n3} \cdot X_3 + \dots + S_{nn} \cdot X_n = p_n
 \end{array}$$

pivotes  
 X  $f_{21} = -S_{21}/S_{11}$   
 X  $f_{31} = -S_{31}/S_{11}$   
  
 X  $f_{n1} = -S_{n1}/S_{11}$

Se multiplica la ecuación pivote por cada pivote y se suma a cada ecuación

$$S_{11} \cdot (-S_{21}/S_{11}) + S_{11} = -S_{11} + S_{11} = 0$$

La ecuación pivote se mantiene y cada una de las demás se modifica anulando la primera columna

$$\begin{array}{l}
 S_{11} \cdot X_1 + S_{12} \cdot X_2 + S_{13} \cdot X_3 + \dots + S_{1n} \cdot X_n = p_1 \\
 0 \cdot X_1 + S'_{22} \cdot X_2 + S'_{23} \cdot X_3 + \dots + S'_{2n} \cdot X_n = p'_2 \\
 0 \cdot X_1 + S'_{32} \cdot X_2 + S'_{33} \cdot X_3 + \dots + S'_{3n} \cdot X_n = p'_3 \\
 \vdots \\
 0 \cdot X_1 + S'_{n2} \cdot X_2 + S'_{n3} \cdot X_3 + \dots + S'_{nn} \cdot X_n = p'_n
 \end{array}$$

pivotes  
 X  $f'_{32} = -S'_{32}/S'_{22}$   
  
 X  $f'_{n2} = -S'_{n2}/S'_{22}$

Se toma la segunda ecuación como pivote

Se reitera el proceso anulando la segunda columna

Se toma la tercera ecuación como pivote

Se reitera el proceso anulando la tercera columna

Se repite con todas las ecuaciones hasta que todos los términos bajo la diagonal principal sean nulos (matriz triangular)

$$\begin{array}{l}
 S_{11} \cdot X_1 + S_{12} \cdot X_2 + S_{13} \cdot X_3 + \dots + S_{1n-1} \cdot X_{n-1} + S_{1n} \cdot X_n = p_1 \\
 \quad + S_{22} \cdot X_2 + S_{23} \cdot X_3 + \dots + S_{2n-1} \cdot X_{n-1} + S_{2n} \cdot X_n = p_2 \\
 \quad \quad + S_{33} \cdot X_3 + \dots + S_{3n-1} \cdot X_{n-1} + S_{3n} \cdot X_n = p_3 \\
 \vdots \\
 \quad \quad \quad + S_{n-1,1} \cdot X_{n-1} + S_{n-1,n} \cdot X_n = p_{n-1} \\
 \quad \quad \quad \quad + S_{nn} \cdot X_n = p_n
 \end{array}$$

De la última ecuación se despeja  $x_n$

Llevando este valor a la penúltima se despeja  $x_{n-1}$

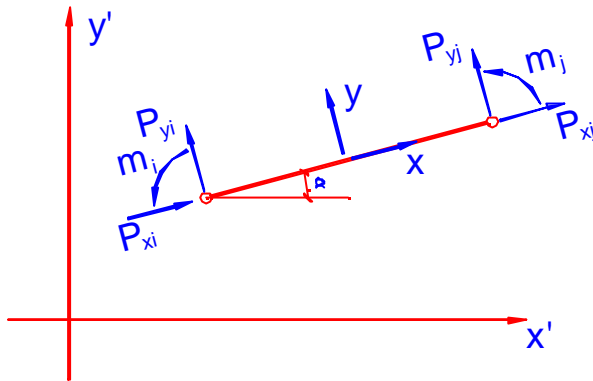
Procediendo sucesivamente se obtienen todas las incógnitas

## CÁLCULO DE ESFUERZOS

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

Se obtienen los desplazamientos en los nudos , pero interesa conocer los esfuerzos en la barras.

Para cada barra



Se conocen  $d'_i$  y  $d'_j$

Interesa conocer  $P_i$  y  $P_j$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} \quad \text{pero}$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

Calculamos los desplazamientos en coordenadas locales

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

Llevando estos desplazamientos a la ecuación constitutiva se obtienen los esfuerzos sobre la barra

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$$

Al afectar a las barras una por una no es necesario recurrir a las matrices completas de la estructura, sino sólo a las de cada barra, lo que supone una gran simplificación de cálculo.



## COMPROBACIÓN DE RESULTADOS

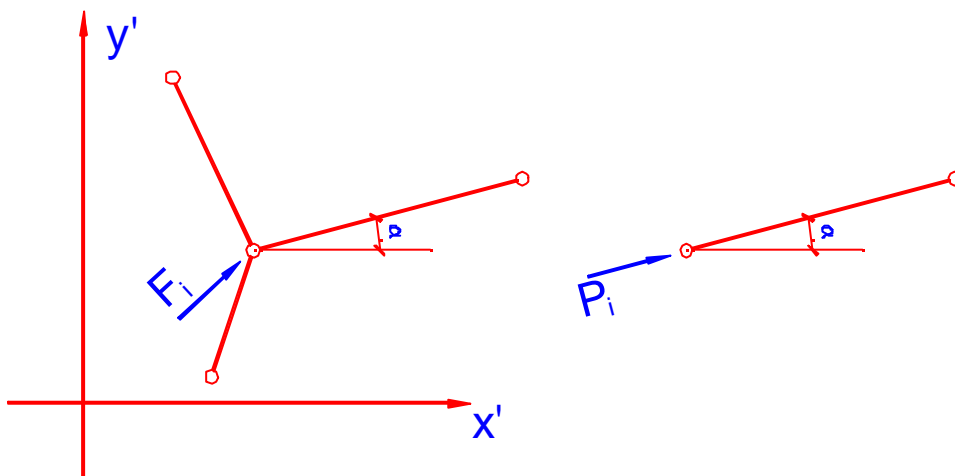
Los resultados del cálculo matricial nunca son rigurosamente exactos.

Errores de truncadura

Problemas de mal condicionamiento

SIEMPRE es preciso comprobar que la estructura está en equilibrio

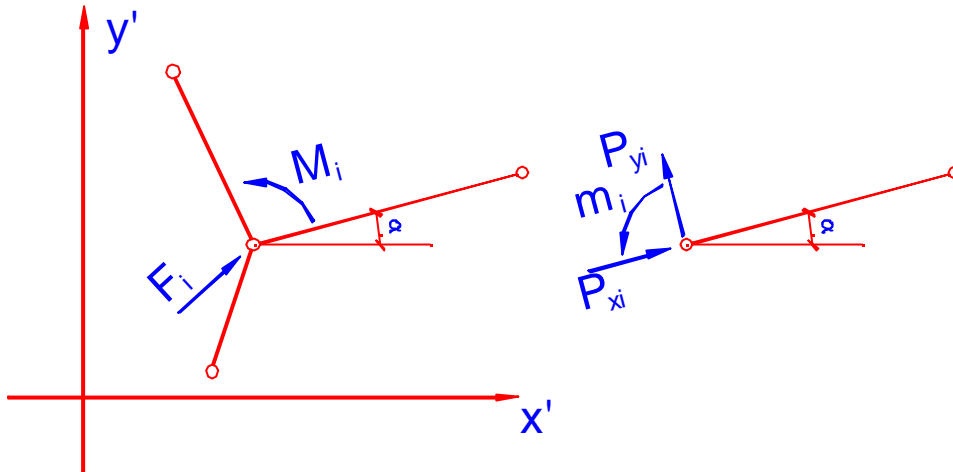
**ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS.-** Se comprueba el equilibrio de los nudos, para las fuerzas horizontales y verticales externas.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ix} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos a_i = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{iy} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sen a_i = 0$$

**ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS.- Se comprueba el equilibrio de los nudos para las fuerzas horizontales y verticales y para los momentos externos.**

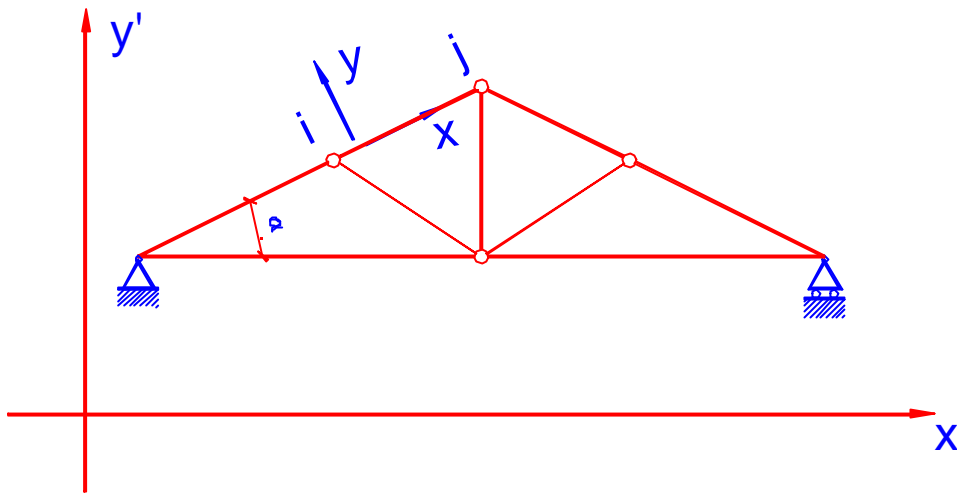


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ix} + \sum_{i=1}^n (P_{xi} \cdot \cos a_i - P_{yi} \cdot \sen a_i) = 0$$

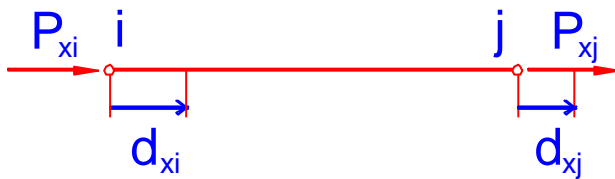
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{iy} + \sum_{i=1}^n (P_{xi} \cdot \sen a_i + P_{yi} \cdot \cos a_i) = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_i + \sum_{i=1}^n m_i = 0$$

# ESTRUCTURAS PLANAS DE NUDOS ARTICULADOS



## Ecuación de la barra



$$P_{xi} = -P_{xj}$$

$$l = d_{xj} - d_{xi} = \frac{P_{xj} \cdot l}{E \cdot A}$$

$$P_{xj} = -P_{xi} = \frac{E \cdot A}{l} (d_{xj} - d_{xi})$$

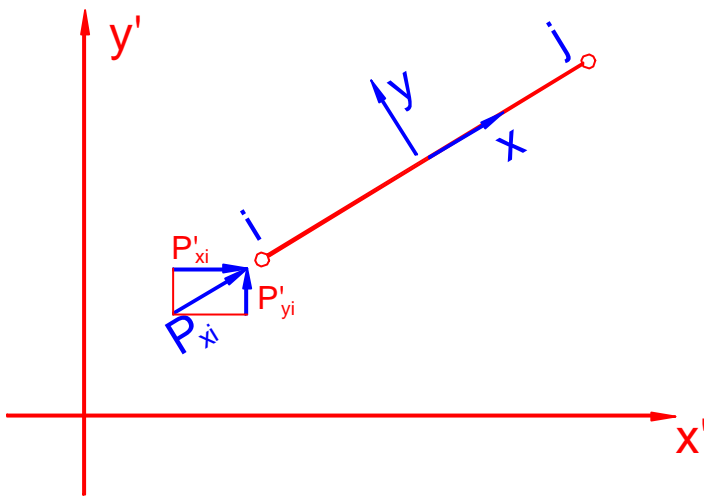
## Puesto en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{xj} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & -\frac{E \cdot A}{l} \\ -\frac{E \cdot A}{l} & \frac{E \cdot A}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}}$$

$$\tilde{P}_i = \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{d}_j$$

$$\tilde{P}_j = \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{d}_j$$

**Cambio de ejes**



$$P'_{xi} = P_{xi} \cdot \cos a$$

$$P'_{yi} = P_{yi} \cdot \sen a$$

**En forma matricial**

$$\begin{pmatrix} P'_{xi} \\ P'_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sen a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}'_i = \tilde{A}^t \tilde{P}_i$$

**Proyectando sobre el eje de la barra**

$$P_{xi} = P'_{xi} \cos a + P'_{yi} \sen a \Rightarrow \begin{pmatrix} P_{xi} \end{pmatrix} = \underbrace{(\cos a \quad \sen a)}_{\tilde{A}} \cdot \begin{pmatrix} P'_{xi} \\ P'_{yi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}_i = \tilde{A} \tilde{P}'_i$$

**Para los desplazamientos las relaciones son idénticas**

$$\tilde{d}_i = \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i \quad \tilde{d}'_i = \tilde{A}^t \cdot \tilde{d}_i$$

**Aplicando la transformación de coordenadas a las ecuaciones**

$$\tilde{P}_i = \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{d}_j \Rightarrow \tilde{P}_i = \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j$$

$$\tilde{P}_j = \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{d}_j \Rightarrow \tilde{P}_j = \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j$$

**Multiplicando a la izquierda por A<sup>t</sup>**

$$\tilde{P}'_i = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P}_i = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j = \tilde{S}_{ii} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{S}_{ij} \cdot \tilde{d}'_j$$

$$\tilde{P}'_j = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P}_j = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j = \tilde{S}_{ji} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{S}_{jj} \cdot \tilde{d}'_j$$

## Efectuando las multiplicaciones matriciales

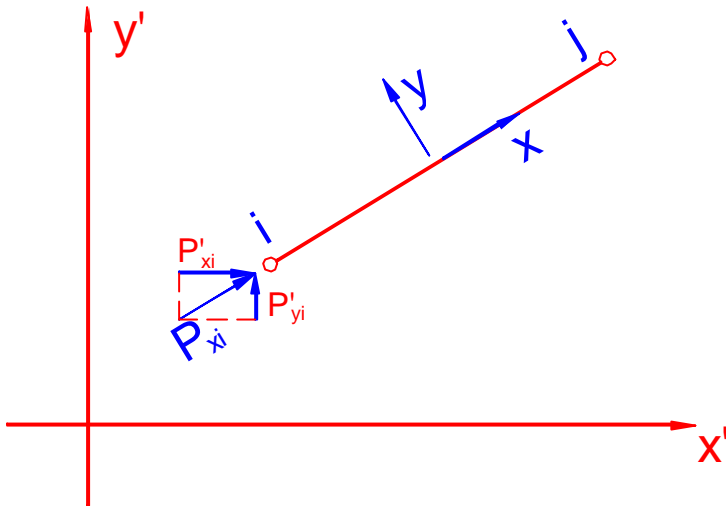
$$S_{ii} = S_{jj} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sen a \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{EA}{l} \right) \cdot (\cos a \quad \sen a) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 a & \frac{EA}{l} \sen a \cos a \\ \frac{EA}{l} \sen a \cos a & \frac{EA}{l} \sen^2 a \end{pmatrix}$$

$$S_{ij} = S_{ji} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sen a \end{pmatrix} \cdot \left( -\frac{EA}{l} \right) \cdot (\cos a \quad \sen a) = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} \cos^2 a & -\frac{EA}{l} \sen a \cos a \\ -\frac{EA}{l} \sen a \cos a & -\frac{EA}{l} \sen^2 a \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales de la barra será

$$\begin{pmatrix} P'_{xi} \\ P'_{yi} \\ \dots \\ P'_{xj} \\ P'_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 a & \frac{EA}{l} \sen a \cos a & : & -\frac{EA}{l} \cos^2 a & -\frac{EA}{l} \sen a \cos a \\ \frac{EA}{l} \sen a \cos a & \frac{EA}{l} \sen^2 a & : & -\frac{EA}{l} \sen a \cos a & -\frac{EA}{l} \sen^2 a \\ \dots & \dots & : & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 a & -\frac{EA}{l} \sen a \cos a & : & \frac{EA}{l} \cos^2 a & \frac{EA}{l} \sen a \cos a \\ -\frac{EA}{l} \sen a \cos a & -\frac{EA}{l} \sen^2 a & : & \frac{EA}{l} \sen a \cos a & \frac{EA}{l} \sen^2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d'_{xi} \\ d'_{yi} \\ \dots \\ d'_{xj} \\ d'_{yj} \end{pmatrix}$$

## CÁLCULO DE ESFUERZOS: ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS



Para cada barra se aplica la ecuación de compatibilidad

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}'$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_{xi} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d'_{xi} \\ d'_{yi} \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}'}$$

Nudo origen i

$$d_{xi} = \cos a \cdot d'_{xi} + \sin a \cdot d'_{yi}$$

Nudo extremo j

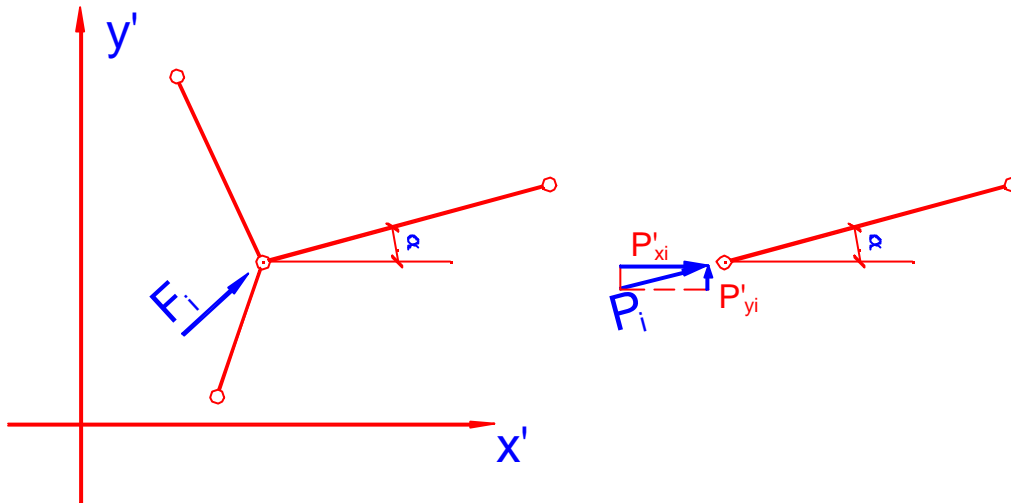
$$d_{xj} = \cos a \cdot d'_{xj} + \sin a \cdot d'_{yj}$$

Aplicando la ecuación constitutiva

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} \left\{ \begin{array}{l} P_{xi} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot d_{xj} \\ P_{xj} = -\frac{EA}{l} \cdot d_{xi} + \frac{EA}{l} \cdot d_{xj} \end{array} \right.$$

## COMPROBACIÓN DE RESULTADOS: ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS.

Se comprueba el equilibrio de los nudos, para las fuerzas horizontales y verticales externas.



Es preciso pasar los esfuerzos sobre las barras a coordenadas globales

$$\tilde{\mathbf{P}}'_i = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{xi} \\ \mathbf{P}'_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{P}_i)$$

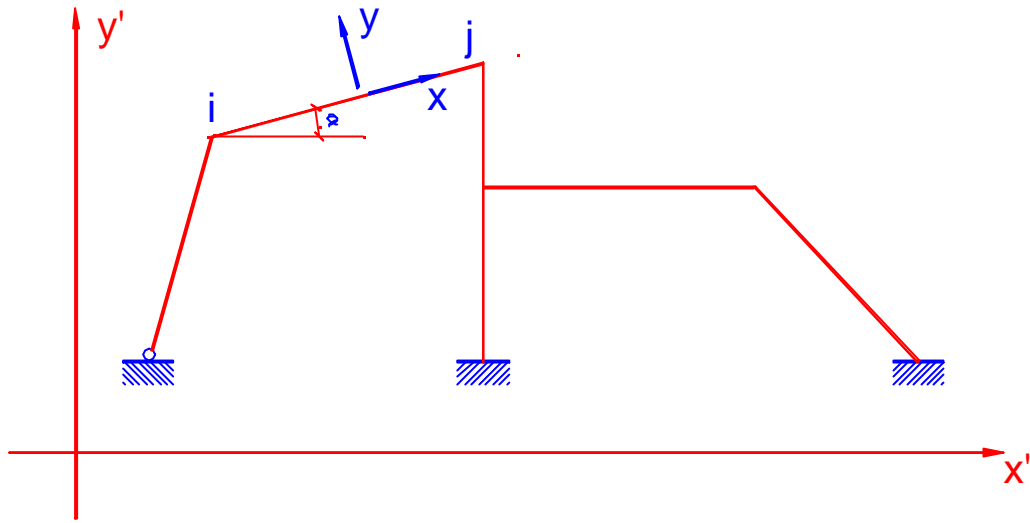
$$\mathbf{P}'_{xi} = \mathbf{P}_i \cdot \cos a \quad ; \quad \mathbf{P}'_{yi} = \mathbf{P}_i \cdot \sin a$$

Aplicando las condiciones de equilibrio

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{ix} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \cos a_i = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_y = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{iy} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \sin a_i = 0$$

# ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS PLANOS



**Matriz de cargas exteriores**

$$\tilde{\mathbf{P}}'_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{xi} \\ \mathbf{F}_{yi} \\ \mathbf{M}_i \end{pmatrix}$$

**Matriz de fuerzas internas**

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{xi} \\ \mathbf{P}_{yi} \\ \mathbf{m}_i \\ \dots \\ \mathbf{P}_{xj} \\ \mathbf{P}_{yj} \\ \mathbf{m}_j \end{pmatrix}$$

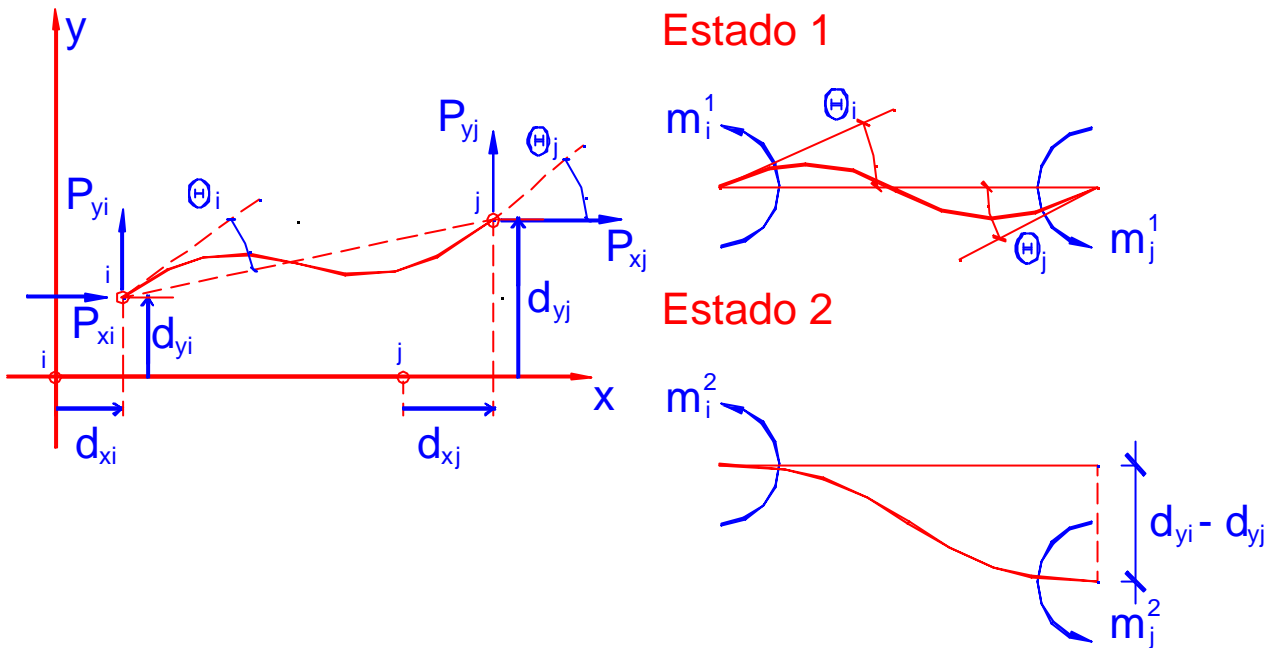
**Desplazamientos en coord. locales**

$$\tilde{\mathbf{d}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{xi} \\ \mathbf{d}_{yi} \\ \mathbf{q}_i \\ \dots \\ \mathbf{d}_{xj} \\ \mathbf{d}_{yj} \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix}$$

**Desplazamientos en coordenadas globales**

$$\tilde{\mathbf{d}}'_i = \begin{pmatrix} \mathbf{d}'_{xi} \\ \mathbf{d}'_{yi} \\ \mathbf{q}'_i \\ \dots \\ \mathbf{d}'_{xj} \\ \mathbf{d}'_{yj} \\ \mathbf{q}'_j \end{pmatrix}$$





**Momentos producidos por el estado 1.- Giro de los extremos.**

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{m_i^1 \cdot l}{3EI} - \frac{m_j^1 \cdot l}{6EI} \\ q_j &= -\frac{m_i^1 \cdot l}{6EI} + \frac{m_j^1 \cdot l}{3EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m_i^1 = \frac{4EI}{l} \cdot q_i + \frac{2EI}{l} \cdot q_j \\ m_j^1 = \frac{2EI}{l} \cdot q_i + \frac{4EI}{l} \cdot q_j \end{cases}$$

**Momentos producidos por el estado 2.- Desplaz. de los extremos.**

$$m_i^2 = m_j^2 = \frac{6EI}{l^2} (d_{yi} - d_{yj}) = \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yj}$$

**El estado total es la suma de ambos**

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yi} + \frac{4EI}{l} \cdot q_i - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{2EI}{l} \cdot q_j \\ m_j &= \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yi} + \frac{2EI}{l} \cdot q_i - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{4EI}{l} \cdot q_j \end{aligned}$$

**Esfuerzos cortantes.- Se plantea la ecuación de equilibrio de la barra**

$$P_{yi} = -P_{yj} = \frac{m_i + m_j}{l} = \frac{12EI}{l^3} \cdot d_{yi} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_i - \frac{12EI}{l^3} \cdot d_{yj} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_j$$

**Esfuerzos axiles.- Su formulación es idéntica a las estructuras articuladas**

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot d_{xj}$$

**Poniendo todas estas ecuaciones en forma matricial**

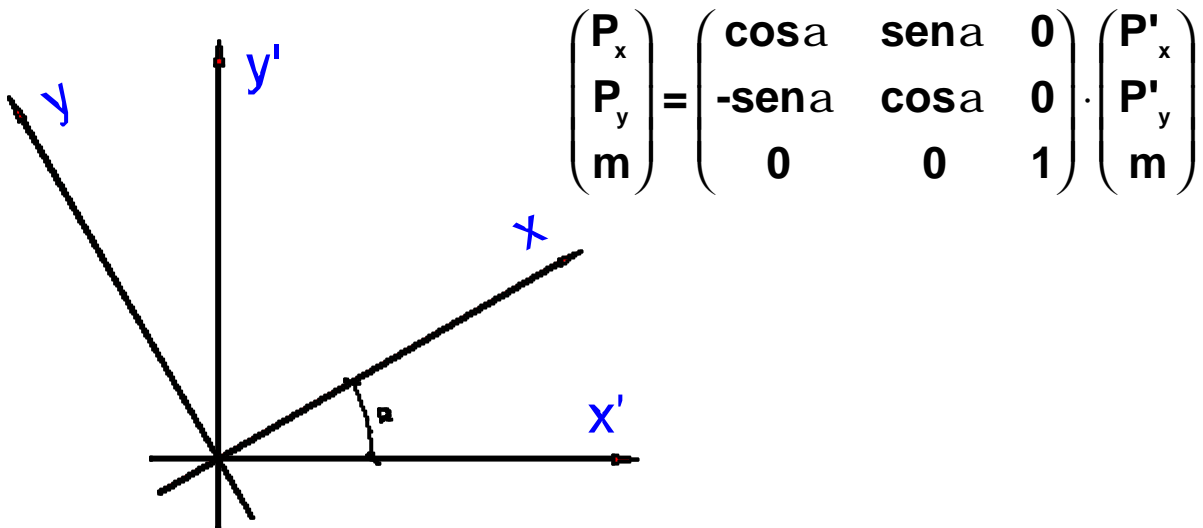
$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ m_i \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ii}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ q_i \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ij}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ q_j \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_j}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{xj} \\ P_{yj} \\ m_j \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ji}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ q_i \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{jj}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ q_j \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_j}$$

**Que pueden ponerse en la forma**

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_i &= \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{d}_j \\ \tilde{P}_j &= \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{d}_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{En coordenadas locales}$$

**Cambio de coordenadas.- Se pasan de coordenadas locales (x,y) a globales (x',y') por medio de una matriz de rotación.**



Como en las matrices de

$$\tilde{P} = \tilde{A} \cdot \tilde{P}'$$

$\tilde{P}' = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P}$  rotación la inversa es igual a la traspuesta

Aplicando la transformación de coordenadas a las ecuaciones

$$\tilde{P}_i = \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{d}_j \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_i = \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j$$

$$\tilde{P}_j = \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{d}_j \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_j = \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j$$

Multiplicando a la izquierda por  $A^t$

$$\tilde{P}'_i = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P}_i = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j = \tilde{S}_{ii} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{S}_{ij} \cdot \tilde{d}'_j$$

$$\tilde{P}'_j = \tilde{A}^t \cdot \tilde{P}_j = \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{A}^t \cdot \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{d}'_j = \tilde{S}_{ji} \cdot \tilde{d}'_i + \tilde{S}_{jj} \cdot \tilde{d}'_j$$

**Para calcular las submatrices S se aplica la transformación de coordenadas a cada una de las submatrices K**

$$\tilde{S}_{ii} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos a & -\text{sen} a & 0 \\ \text{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ii}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos a & \text{sen} a & 0 \\ -\text{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

El resultado final de efectuar estas multiplicaciones matriciales a las cuatro submatrices será

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} a & c & d & : & -a & -c & d \\ c & b & e & : & -c & -b & e \\ d & e & f & : & -d & -e & g \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -c & -d & : & a & c & -d \\ -c & -b & -e & : & c & b & -e \\ d & e & g & : & -d & -e & f \end{pmatrix} \quad \text{Siendo}$$

$$a = \frac{EA}{l} \cdot \cos^2 a + \frac{12EI}{l^3} \cdot \text{sen}^2 a$$

$$b = \frac{EA}{l} \cdot \text{sen}^2 a + \frac{12EI}{l^3} \cdot \cos^2 a$$

$$c = \frac{EA}{l} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a - \frac{12EI}{l^3} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a$$

$$d = -\frac{6EI}{l^2} \cdot \text{sen} a \quad ; \quad e = \frac{6EI}{l^2} \cdot \cos a$$

$$f = \frac{4EI}{l} \quad ; \quad g = \frac{2EI}{l}$$

**CÁLCULO DE ESFUERZOS: ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS PLANOS**

Para cada barra se aplica la ecuación de compatibilidad

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}'$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{xi} \\ \mathbf{d}_{yi} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \text{sen} a & 0 \\ -\text{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}'_{xi} \\ \mathbf{d}'_{yi} \\ q'_i \end{pmatrix}$$

Aplicando esta ecuación a los nudos origen y extremo de la barra

**Nudo origen i**

$$\mathbf{d}_{xi} = \cos a \cdot \mathbf{d}'_{xi} + \text{sen} a \cdot \mathbf{d}'_{yi}$$

$$\mathbf{d}_{yi} = -\text{sen} a \cdot \mathbf{d}'_{xi} + \cos a \cdot \mathbf{d}'_{yi}$$

$$q_i = q'_i$$

**Nudo extremo j**

$$\mathbf{d}_{xj} = \cos a \cdot \mathbf{d}'_{xj} + \text{sen} a \cdot \mathbf{d}'_{yj}$$

$$\mathbf{d}_{yj} = -\text{sen} a \cdot \mathbf{d}'_{xj} + \cos a \cdot \mathbf{d}'_{yj}$$

$$q_j = q'_j$$

Aplicando la ecuación constitutiva  $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} \cdot \mathbf{d}_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot \mathbf{d}_{xj}$$

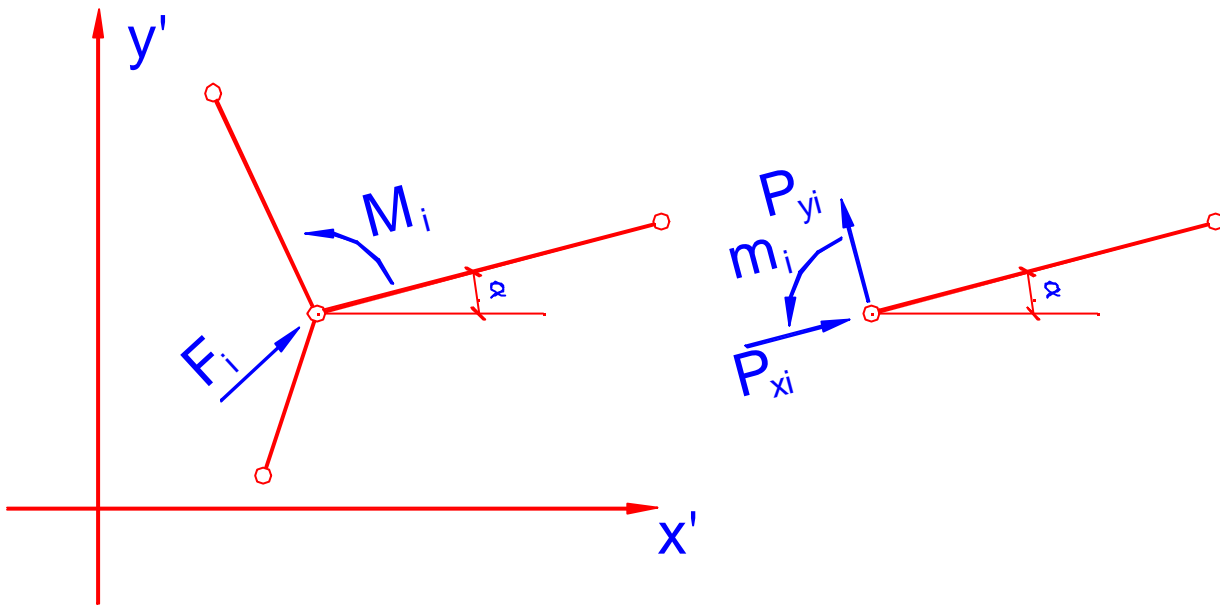
$$P_{yi} = -P_{yj} = \frac{m_i + m_j}{l} = \frac{12EI}{l^3} \cdot \mathbf{d}_{yi} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_i - \frac{12EI}{l^3} \cdot \mathbf{d}_{yj} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_j$$

$$m_i = \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{yi} + \frac{4EI}{l} \cdot q_i - \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{yj} + \frac{2EI}{l} \cdot q_j$$

$$m_j = \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{yi} + \frac{2EI}{l} \cdot q_i - \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{yj} + \frac{4EI}{l} \cdot q_j$$

## COMPROBACIÓN DE RESULTADOS: ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS PLANOS.

Se comprueba el equilibrio de los nudos, para las fuerzas horizontales y verticales externas y para los momentos exteriores.



Es preciso pasar los esfuerzos sobre las barras a coordenadas globales

$$\tilde{\mathbf{P}}'_i = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{xi} \\ \mathbf{P}'_{yi} \\ \mathbf{m}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_i & -\text{sen } a_i & 0 \\ \text{sen } a_i & \cos a_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{xi} \\ \mathbf{P}_{yi} \\ \mathbf{m}_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}'_{xi} = \mathbf{P}_{xi} \cdot \cos a_i - \mathbf{P}_{yi} \cdot \text{sen } a_i$$

$$\mathbf{P}'_{yi} = \mathbf{P}_{xi} \cdot \text{sen } a_i + \mathbf{P}_{yi} \cdot \cos a_i$$

$$\mathbf{m}'_i = \mathbf{m}_i$$

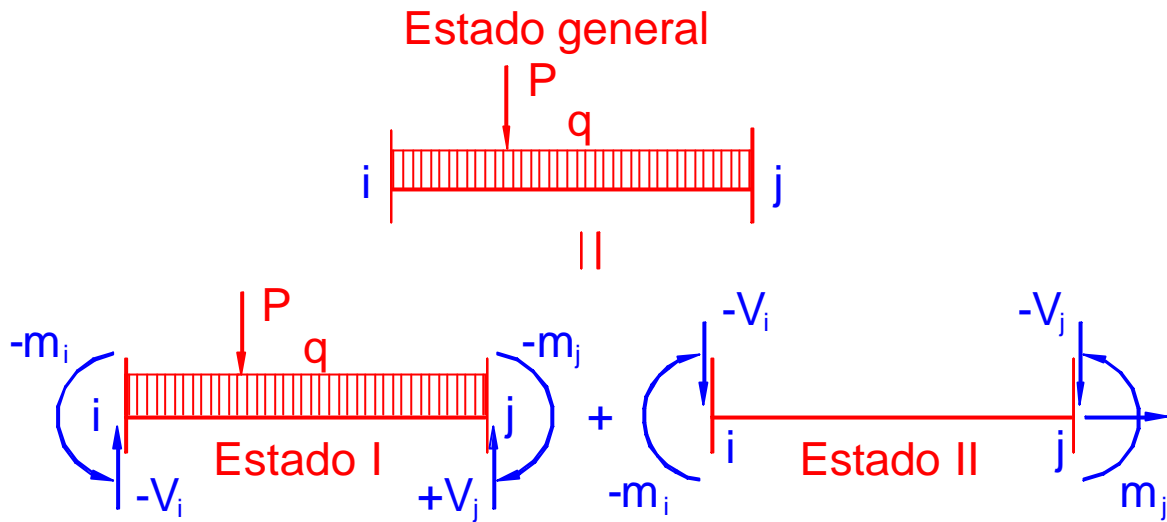
Aplicando las condiciones de equilibrio

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{ix} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_{xi} \cdot \cos a_i - \mathbf{P}_{yi} \cdot \text{sen } a_i) = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_y = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{iy} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_{xi} \cdot \text{sen } a_i + \mathbf{P}_{yi} \cdot \cos a_i) = 0$$

$$\sum \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i = 0$$

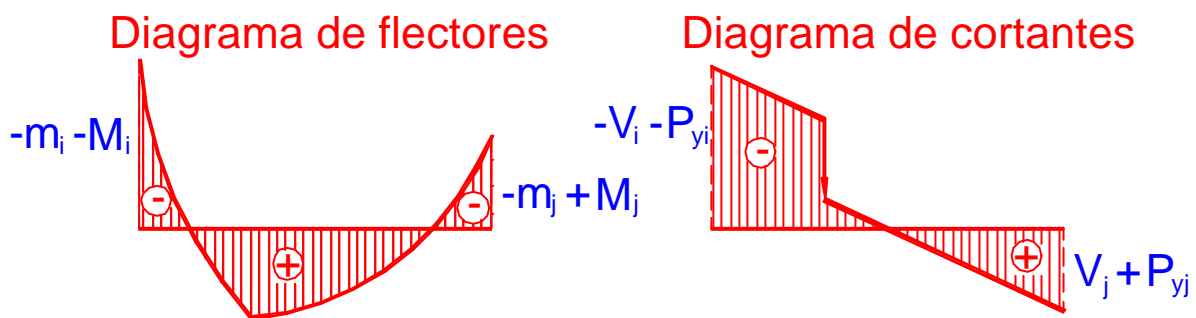
## ACCIONES SOBRE LAS BARRAS.- PÓRTICOS PLANOS



**Estado I .-** Se emplea el convenio de signos de flectores y cortantes



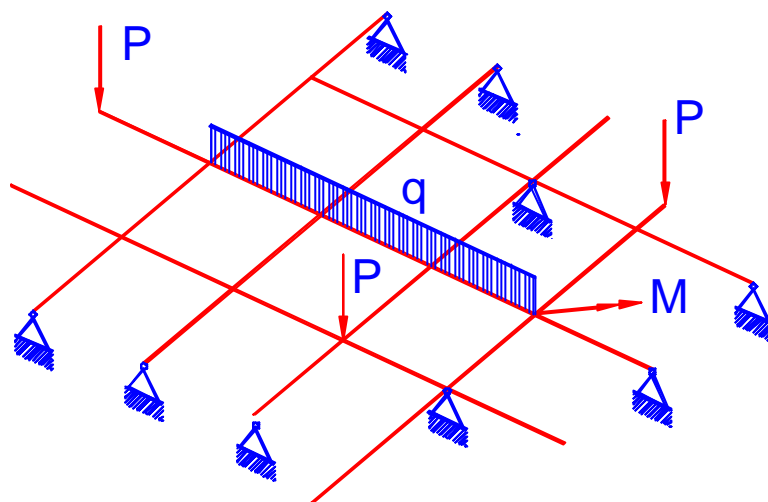
**Estado II.-** Se emplea el convenio de signos de matricial



**Resultado final**

**Superposición E' + E''**

## ESTRUCTURAS DE EMPARRILLADOS PLANOS

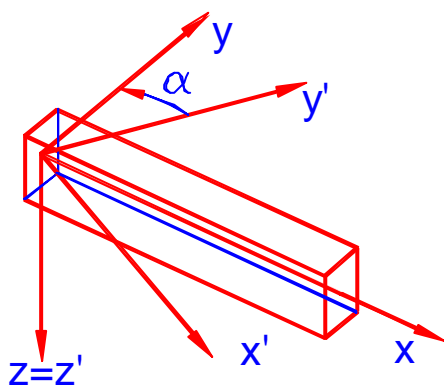


### Condiciones

- ⊆ Estructura plana, horizontal, de nudos rígidos.
- ⊆ Cargas perpendiculares al plano.
- ⊆ Momentos contenidos en el planos

### Hipótesis

- ⊆ Los desplazamientos son sólo verticales.
- ⊆ No se producen giros de eje vertical





**Matriz de cargas  
exteriores**

$$\tilde{\mathbf{P}}'_i = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xi} \\ \mathbf{F}_{zi} \\ \mathbf{M}_{yi} \end{pmatrix}$$

**Matriz de fuerzas  
internas**

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{xi} \\ \mathbf{P}_{zi} \\ \mathbf{m}_{yi} \\ \dots \\ \mathbf{m}_{xj} \\ \mathbf{P}_{zj} \\ \mathbf{m}_{yj} \end{pmatrix}$$

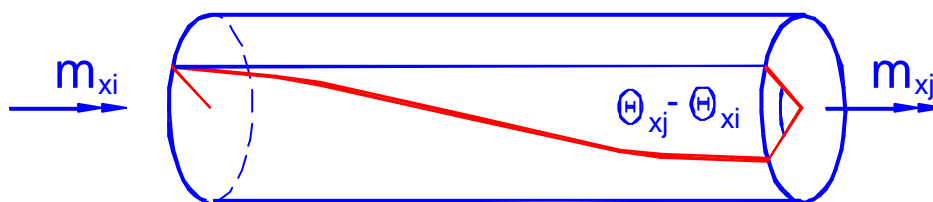
**Desplazamientos en  
coord. locales**

$$\tilde{\mathbf{d}}_i = \begin{pmatrix} q_{xi} \\ \mathbf{d}_{zi} \\ q_{yi} \\ \dots \\ q_{xj} \\ \mathbf{d}_{zj} \\ q_{yj} \end{pmatrix}$$

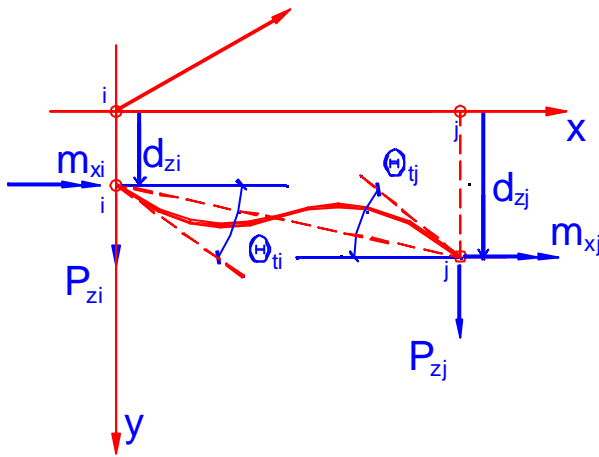
**Desplazamientos en  
coordenadas globales**

$$\tilde{\mathbf{d}}'_i = \begin{pmatrix} q'_{xi} \\ \mathbf{d}'_{zi} \\ q'_{yi} \\ \dots \\ \mathbf{d}'_{xj} \\ \mathbf{d}'_{zj} \\ q'_{yj} \end{pmatrix}$$

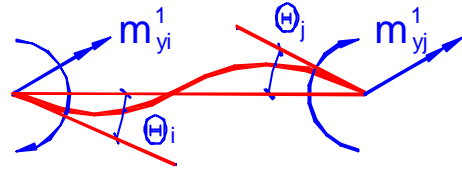
**La diferencia principal con los pórticos planos consiste en el efecto del momento torsor que es análogo al del esfuerzo axial.**



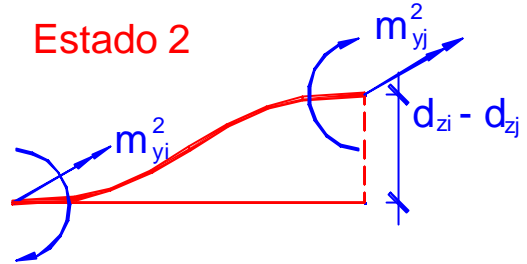
$$\mathbf{m}_{xi} = -\mathbf{m}_{xj} = \frac{\mathbf{GJ}}{\mathbf{l}} \cdot q_{xi} - \frac{\mathbf{GJ}}{\mathbf{l}} \cdot q_{xj}$$



Estado 1



Estado 2



**Momentos producidos por el estado 1.- Giro de los extremos.**

$$\left. \begin{aligned} \theta_{yi} &= \frac{m_{yi}^1 \cdot l}{3EI} - \frac{m_{yj}^1 \cdot l}{6EI} \\ \theta_{yj} &= -\frac{m_{yi}^1 \cdot l}{3EI} + \frac{m_{yj}^1 \cdot l}{6EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m_{yi}^1 = \frac{4EI}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{2EI}{l} \cdot \theta_{yj} \\ m_{yj}^1 = \frac{2EI}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{4EI}{l} \cdot \theta_{yj} \end{cases}$$

**Momentos producidos por el estado 2.- Desplaz. de los extremos.**

$$m_{yi}^2 = m_{yj}^2 = \frac{6EI}{l^2} (d_{zi} - d_{zj}) = \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zj}$$

**El estado total es la suma de ambos**

$$\begin{aligned} m_{yi} &= \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{4EI}{l} \cdot q_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{2EI}{l} \cdot q_{yj} \\ m_{yj} &= \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{2EI}{l} \cdot q_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{4EI}{l} \cdot q_{yj} \end{aligned}$$

**Esfuerzos cortantes.-** Se plantea la ecuación de equilibrio de la barra

$$P_{zi} = -P_{zj} = \frac{m_i + m_j}{l} = \frac{12EI}{l^3} \cdot d_{zi} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_{yi} - \frac{12EI}{l^3} \cdot d_{zj} + \frac{6EI}{l^2} \cdot q_{yj}$$

**Momentos torsores.-** Su formulación es análoga a las estructuras de pórticos planos

$$m_{xi} = -m_{xj} = \frac{GJ}{l} \cdot q_{xi} - \frac{GJ}{l} \cdot q_{xj}$$

**Poniendo todas estas ecuaciones en forma matricial**

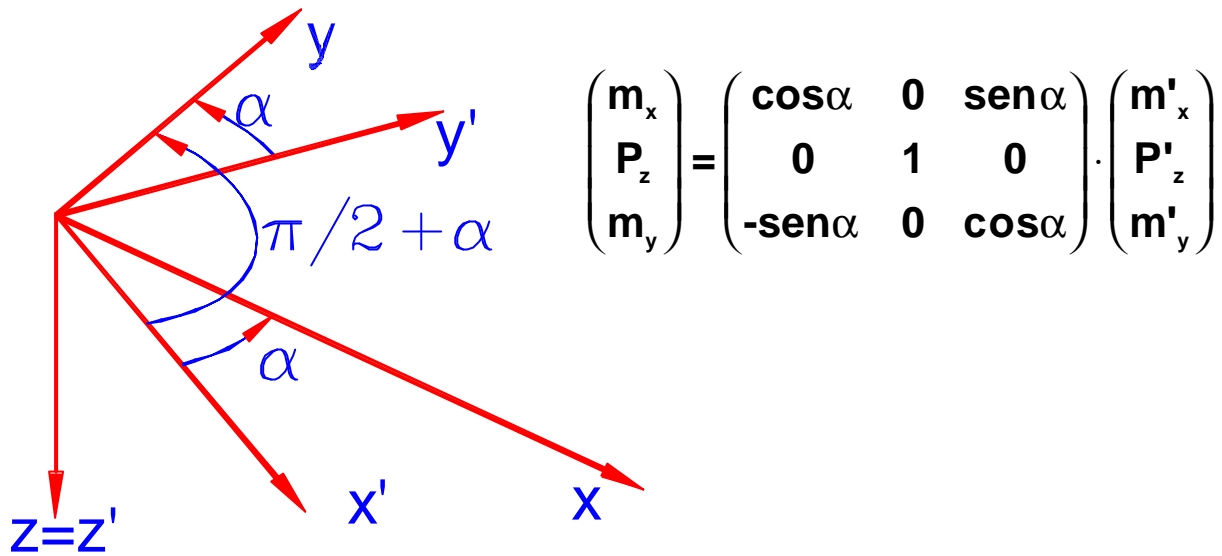
$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_{xi} \\ P_{zi} \\ m_{yi} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ii}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{xi} \\ d_{zi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ij}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{xj} \\ d_{zj} \\ \theta_{yj} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_j}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_{xj} \\ P_{zj} \\ m_{yj} \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ji}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{xi} \\ d_{zi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{jj}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{xj} \\ d_{zj} \\ \theta_{yj} \end{pmatrix}}_{\tilde{d}_j}$$

**Que pueden ponerse en la forma**

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_i &= \tilde{K}_{ii} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{ij} \cdot \tilde{d}_j \\ \tilde{P}_j &= \tilde{K}_{ji} \cdot \tilde{d}_i + \tilde{K}_{jj} \cdot \tilde{d}_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{En coordenadas locales}$$

**Cambio de coordenadas.- Se pasan de coordenadas locales (x,y) a globales (x',y') por medio de una matriz de rotación.**



**Como en las matrices de rotación la inversa es igual a la traspuesta**

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}' \quad \tilde{\mathbf{P}}' = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

Aplicando la transformación de coordenadas a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_i &= \tilde{\mathbf{K}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_j & \Rightarrow & \tilde{\mathbf{P}}_i = \tilde{\mathbf{K}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \\ \tilde{\mathbf{P}}_j &= \tilde{\mathbf{K}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{K}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_j & \Rightarrow & \tilde{\mathbf{P}}_j = \tilde{\mathbf{K}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{K}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \end{aligned}$$

Multiplicando a la izquierda por  $\mathbf{A}^t$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}'_i &= \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_i = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j = \tilde{\mathbf{S}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{S}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \\ \tilde{\mathbf{P}}'_j &= \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_j = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j = \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{S}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \end{aligned}$$

**Para calcular las submatrices S se aplica la transformación de coordenadas a cada una de las submatrices K**

$$\tilde{S}_{ii} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\text{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\tilde{A}^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{GJ}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{I^3} & \frac{6EI}{I^2} \\ 0 & \frac{6EI}{I^2} & \frac{4EI}{I} \end{pmatrix}}_{\tilde{K}_{ii}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

**El resultado final de efectuar estas multiplicaciones matriciales a las cuatro submatrices será como en el caso del pórtico plano**

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} a & c & d & : & g & -c & h \\ c & b & e & : & c & -b & i \\ d & e & f & : & h & -i & j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g & c & h & : & a & -c & d \\ -c & -b & -i & : & -c & b & -i \\ h & i & j & : & d & -i & f \end{pmatrix} \quad \text{Siendo los coeficientes}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{GJ}{I} \cdot \cos^2 a + \frac{4EI}{I} \cdot \text{sen}^2 a & ; & \quad b = \frac{12EI}{I^3} \\ c &= -\frac{6EI}{I^2} \cdot \text{sen} a & ; & \quad d = \frac{GJ}{I} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a - \frac{4EI}{I} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a \\ e &= \frac{6EI}{I^2} \cdot \cos a & ; & \quad f = \frac{GJ}{I} \cdot \text{sen}^2 a + \frac{4EI}{I} \cdot \cos^2 a \\ g &= -\frac{GJ}{I} \cdot \cos^2 a + \frac{2EI}{I} \cdot \text{sen}^2 a & ; & \quad h = -\frac{GJ}{I} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a + \frac{2EI}{I} \cdot \text{sen} a \cdot \cos a \\ i &= \frac{6EI}{I^2} \cdot \cos a & ; & \quad j = -\frac{GJ}{I} \cdot \text{sen}^2 a + \frac{2EI}{I} \cdot \cos^2 a \end{aligned}$$

## CÁLCULO DE ESFUERZOS: ESTRUCTURAS DE EMPARRILLADOS PLANOS

Para cada barra se aplica la ecuación de compatibilidad

$$\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$$

$$\begin{pmatrix} \theta_{xi} \\ \mathbf{d}_{zi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta'_{xi} \\ \mathbf{d}'_{zi} \\ \theta'_{yi} \end{pmatrix}$$

Aplicando esta ecuación a los nudos origen y extremo de la barra

**Nudo origen i**

$$\theta_{xi} = \cos \alpha \cdot \theta'_{xi} + \text{sen} \alpha \cdot \theta'_{yi}$$

$$\mathbf{d}_{zi} = \mathbf{d}'_{zi}$$

$$\theta_{yi} = -\text{sen} \alpha \cdot \theta'_{xi} + \cos \alpha \cdot \theta'_{yi}$$

**Nudo extremo j**

$$\theta_{xj} = \cos \alpha \cdot \theta'_{xj} + \text{sen} \alpha \cdot \theta'_{yj}$$

$$\mathbf{d}_{zj} = \mathbf{d}'_{zj}$$

$$\theta_{yj} = -\text{sen} \alpha \cdot \theta'_{xj} + \cos \alpha \cdot \theta'_{yj}$$

Aplicando la ecuación constitutiva

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$$

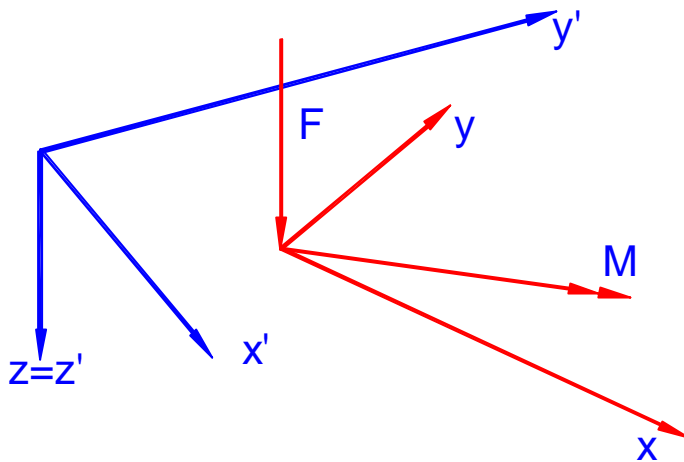
$$m_{xi} = -m_{xj} = \frac{GJ}{l} \cdot \theta_{xi} - \frac{GJ}{l} \cdot \theta_{xj}$$

$$P_{zi} = -P_{zj} = \frac{m_{yi} + m_{yj}}{l} = \frac{12EI}{l^3} \cdot \mathbf{d}_{zi} + \frac{6EI}{l^2} \cdot \theta_{yi} - \frac{12EI}{l^3} \cdot \mathbf{d}_{zj} + \frac{6EI}{l^2} \cdot \theta_{yj}$$

$$m_{yi} = \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{zi} + \frac{4EI}{l} \cdot \theta_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{zj} + \frac{2EI}{l} \cdot \theta_{yj}$$

$$m_{yj} = \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{zi} + \frac{2EI}{l} \cdot \theta_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \cdot \mathbf{d}_{zj} + \frac{4EI}{l} \cdot \theta_{yj}$$

## COMPROBACIÓN DE RESULTADOS: ESTRUCTURAS DE EMPARRILLADOS PLANOS.



Se comprueba el equilibrio de los nudos, para las fuerzas verticales externas y para los momentos exteriores.

Es preciso pasar los esfuerzos sobre las barras a coordenadas globales

$$\tilde{\mathbf{P}}'_i = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{m}'_{xi} \\ \mathbf{P}'_{zi} \\ \mathbf{m}'_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & 0 & -\text{sen } \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{xi} \\ \mathbf{P}_{zi} \\ \mathbf{m}_{yi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}'_{xi} = \mathbf{m}_{xi} \cdot \cos \alpha_i - \mathbf{m}_{yi} \cdot \text{sen } \alpha_i$$

$$\mathbf{P}'_{zi} = \mathbf{P}_{zi}$$

$$\mathbf{m}'_{yi} = \mathbf{m}_{xi} \cdot \text{sen } \alpha_i + \mathbf{m}_{yi} \cdot \cos \alpha_i$$

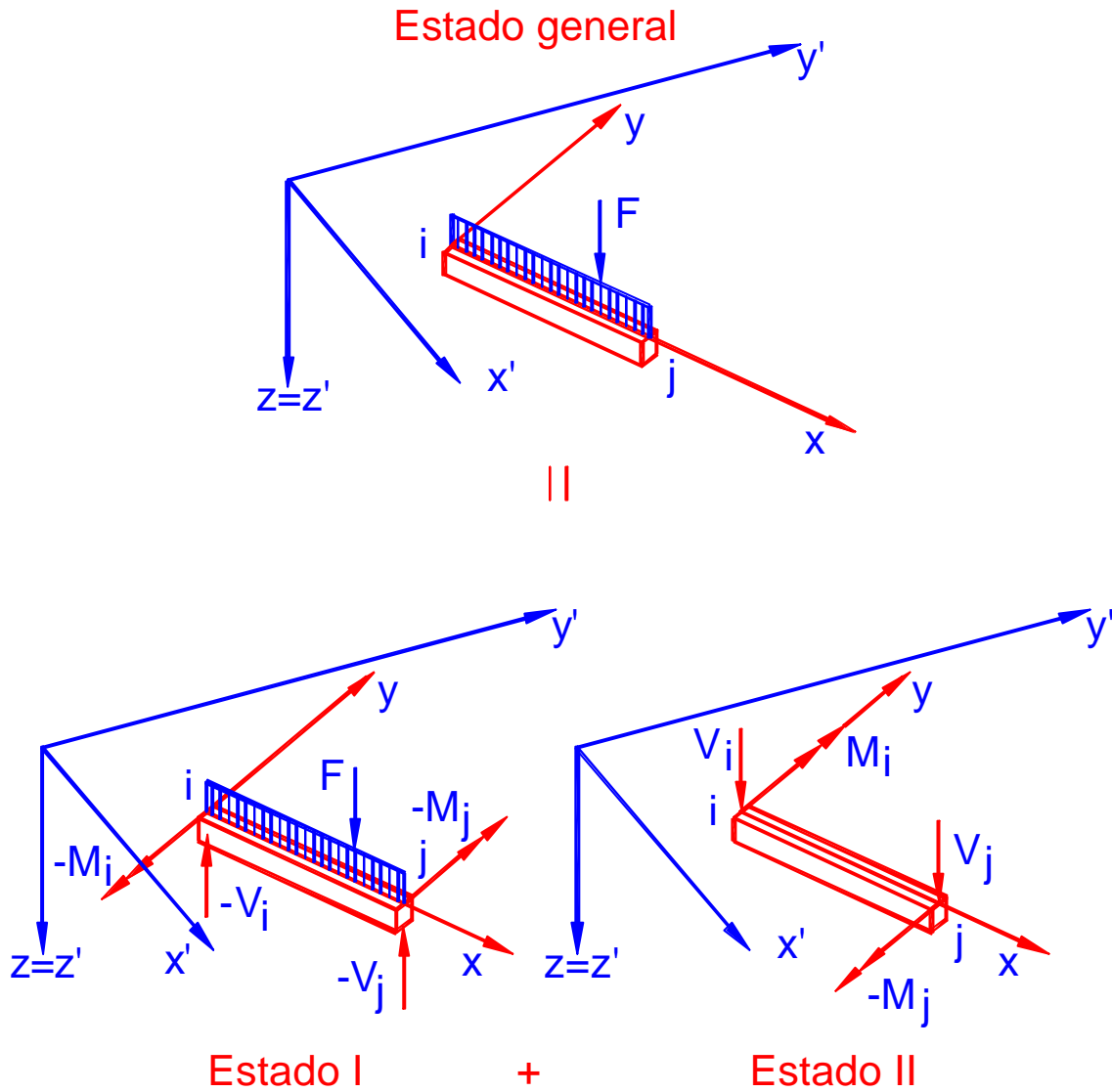
Aplicando las condiciones de equilibrio

$$\sum \mathbf{M}_x = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{ix} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{xi} \cdot \cos \alpha_i - \mathbf{m}_{yi} \cdot \text{sen } \alpha_i) = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_z = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{zi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{zi} = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_y = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{iy} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{xi} \cdot \text{sen } \alpha_i + \mathbf{m}_{yi} \cdot \cos \alpha_i) = 0$$

**ACCIONES SOBRE LAS BARRAS.- EMPARRILLADOS PLANOS**

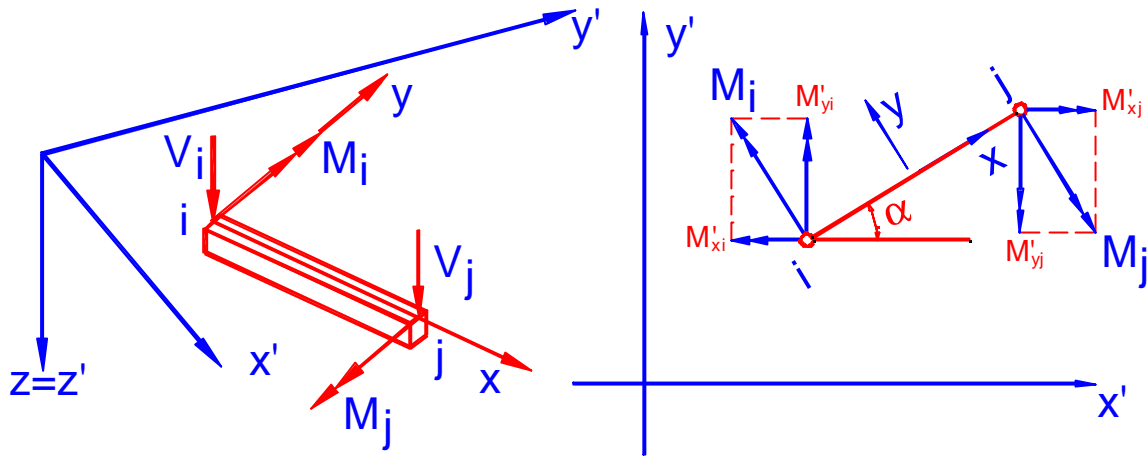


**Estado I .-** Se emplea el convenio de signos de flectores y cortantes

**Estado II.-** Se emplea el convenio de signos de matricial para emparrillados planos



**Los momentos del estado 2 están referidos a coordenadas locales**

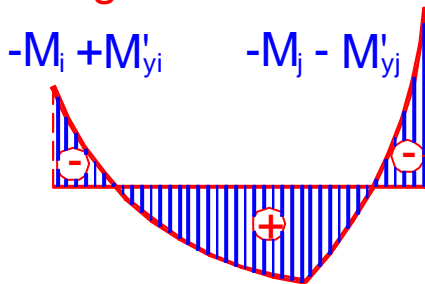


**Deben cambiarse a coordenadas globales**

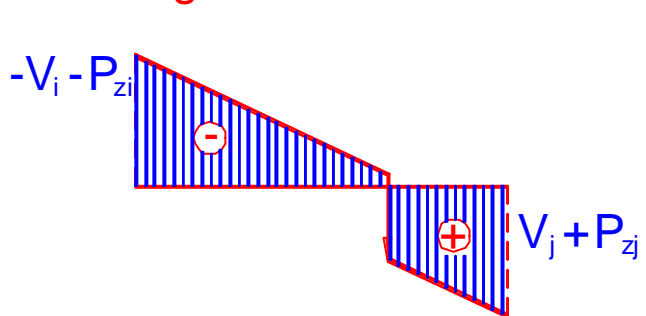
$$M'_{xi} = -M_i \cdot \text{sena} \quad ; \quad M'_{xj} = M_i \cdot \text{sena}$$

$$M'_{yi} = M_i \cdot \text{cosa} \quad ; \quad M'_{yj} = -M_i \cdot \text{cosa}$$

**Diagrama de flectores**



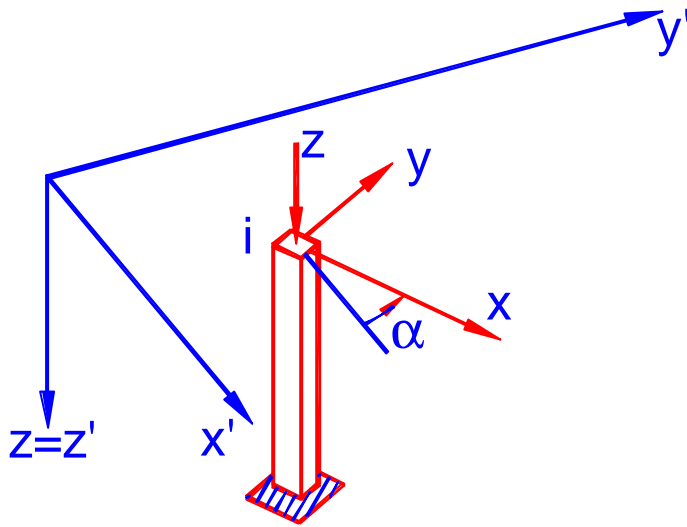
**Diagrama de cortantes**



**Resultado final**

**Superposición E' + E''**

**EMPARRILLADOS SOBRE PILARES.**



**Suponemos sólo desplazamientos verticales en los nudos**

$$m_{xi} = \frac{4EI_x}{l} \cdot \theta_{xi}$$

$$P_{zi} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi}$$

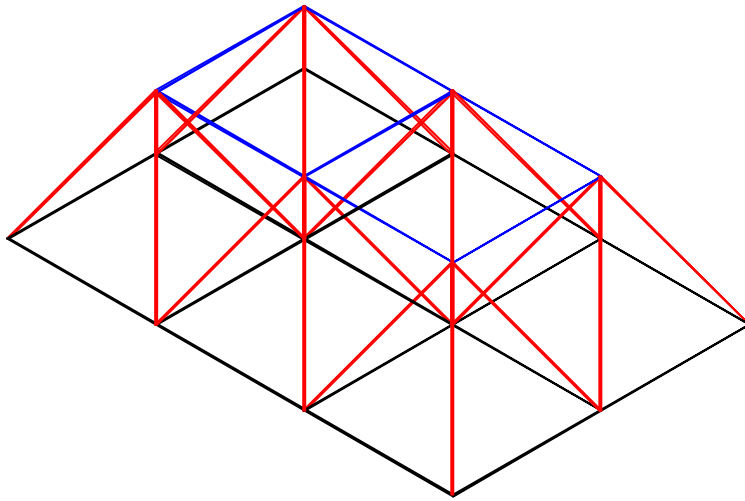
$$m_{yi} = \frac{4EI_y}{l} \cdot \theta_{yi}$$

$$\begin{pmatrix} m_{xi} \\ P_{zi} \\ m_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_{xi} \\ d_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\text{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4EI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

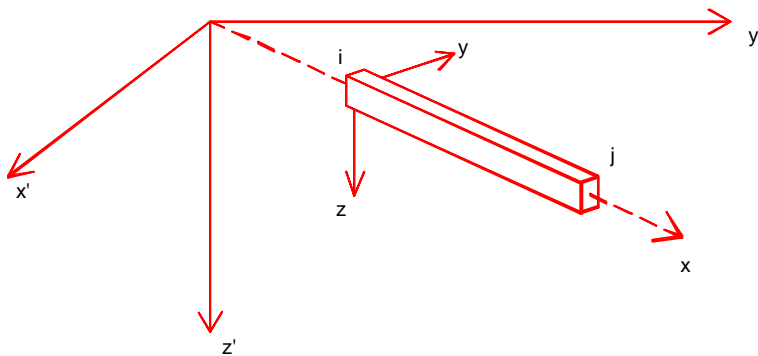
$$\tilde{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{4EI_x}{l} \cos^2\alpha + \frac{4EI_y}{l} \text{sen}^2\alpha & 0 & \left(\frac{4EI_x}{l} - \frac{4EI_y}{l}\right) \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \left(\frac{4EI_x}{l} - \frac{4EI_y}{l}\right) \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha & 0 & \frac{4EI_x}{l} \text{sen}^2\alpha + \frac{4EI_y}{l} \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

## MALLAS ESPACIALES



Son estructuras formadas por barras articuladas en el espacio.

### Ejes locales y ejes globales.



S ó l o e s significativo el eje x

$$\text{Eje } x \rightarrow (\cos a, \cos b, \cos g) = \left( \frac{x_j - x_i}{l}, \frac{y_j - y_i}{l}, \frac{z_j - z_i}{l} \right)$$

### Matriz de rigidez

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l}(d_{xi} - d_{xj})$$

**En forma matricial:**

$$\begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{xj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{P}_i = \tilde{k}_{ii} \tilde{d}_i + \tilde{k}_{ij} \tilde{d}_j \\ \tilde{P}_j = \tilde{k}_{ji} \tilde{d}_i + \tilde{k}_{jj} \tilde{d}_j \end{matrix}$$

**Matriz de compatibilidad:**

$$\tilde{\Delta}^t = (\cos a \quad \cos b \quad \cos g) \quad \tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos g \end{pmatrix}$$

**Matriz de rigidez en coordenadas globales**

$$\tilde{S}_{ij} = \tilde{\Delta} \cdot K_{ij} \cdot \Delta = (\cos a \quad \cos b \quad \cos g) \cdot \left( \pm \frac{EA}{l} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos g \end{pmatrix}$$

**Efectuando el producto de matrices se obtiene**

$$\sum = \frac{EA}{l} \begin{matrix} \tilde{S}_{ii} & & & & & \tilde{S}_{ij} \\ \begin{pmatrix} a & b & c & -a & -b & -c \\ b & d & e & -b & -d & -e \\ c & e & f & -c & -e & -f \\ -a & -b & -c & a & b & c \\ -b & -d & -e & b & d & e \\ -c & -e & -f & c & e & f \end{pmatrix} \\ \tilde{S}_{ji} & & & & & \tilde{S}_{jj} \end{matrix}$$

**a=cos<sup>2</sup>a**

**b=cos a cos b**

**c=cosa cosg**

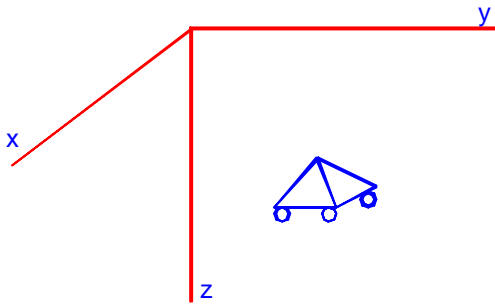
**d=cos<sup>2</sup>b**

**e=cosb cosg**

**f=cos<sup>2</sup>g**

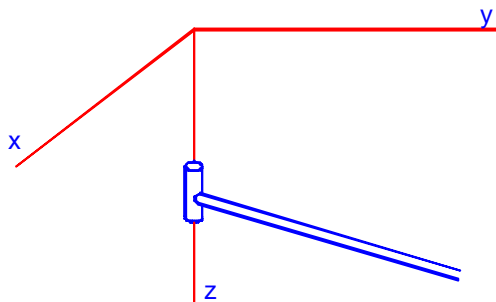
## VÍNCULOS

### Apoyo simple sobre un plano



$$d_z = 0$$

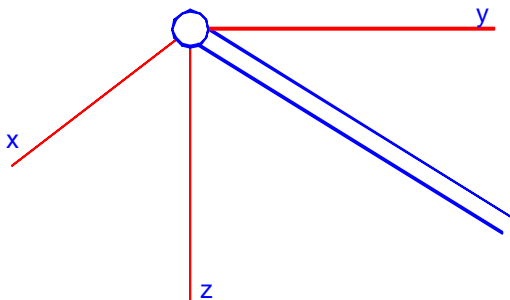
### Articulación cilíndrica



$$d_x = 0$$

$$d_y = 0$$

### Articulación esférica (rótula)



$$d_x = 0$$

$$d_y = 0$$

$$d_z = 0$$

### Cálculo de esfuerzos



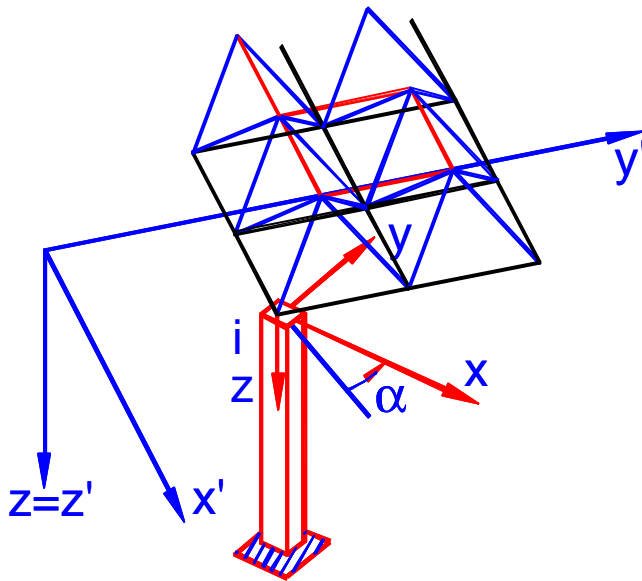
$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} (d_{xi} - d_{xj})$$

$$\text{pero } d_{xi} = d'_{xi} \cos\alpha + d'_{yi} \cos\beta + d'_{zi} \cos\gamma$$

$$d_{xj} = d'_{xj} \cos\alpha + d'_{yj} \cos\beta + d'_{zj} \cos\gamma$$

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} [(d'_{xi} - d'_{xj}) \cos\alpha + (d'_{yi} - d'_{yj}) \cos\beta + (d'_{zi} - d'_{zj}) \cos\gamma]$$

**MALLAS ESPACIALES  
SOBRE PILARES.**



$$m_{xi} = \frac{3EI_x}{l^2} \cdot d_{xi}$$

$$m_{yi} = \frac{3EI_y}{l^2} \cdot d_{yi}$$

$$P_{zi} = \frac{EA}{l} \cdot d_{zi}$$

$$\begin{pmatrix} m_{xi} \\ m_{yi} \\ P_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3EI_x}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \cos a & -\text{sen} a & 0 \\ \text{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3EI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \text{sen} a & 0 \\ -\text{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{3EI_x}{l} \cos^2 a + \frac{3EI_y}{l} \text{sen}^2 a & \left( \frac{3EI_x}{l} - \frac{3EI_y}{l} \right) \text{sen} a \cdot \cos a & 0 \\ \left( \frac{3EI_x}{l} - \frac{3EI_y}{l} \right) \text{sen} a \cdot \cos a & \frac{3EI_x}{l} \text{sen}^2 a + \frac{3EI_y}{l} \cos^2 a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{pmatrix}$$