UNIDAD VI

VI. ESTRUCTURA Y SOLUCIÓN DE UN MODELO PARA EL SISTEMA DE TRANSPORTE, ASIGNACIÓN Y TRANSBORDO

6.1. Estructura Del modelo de transporte

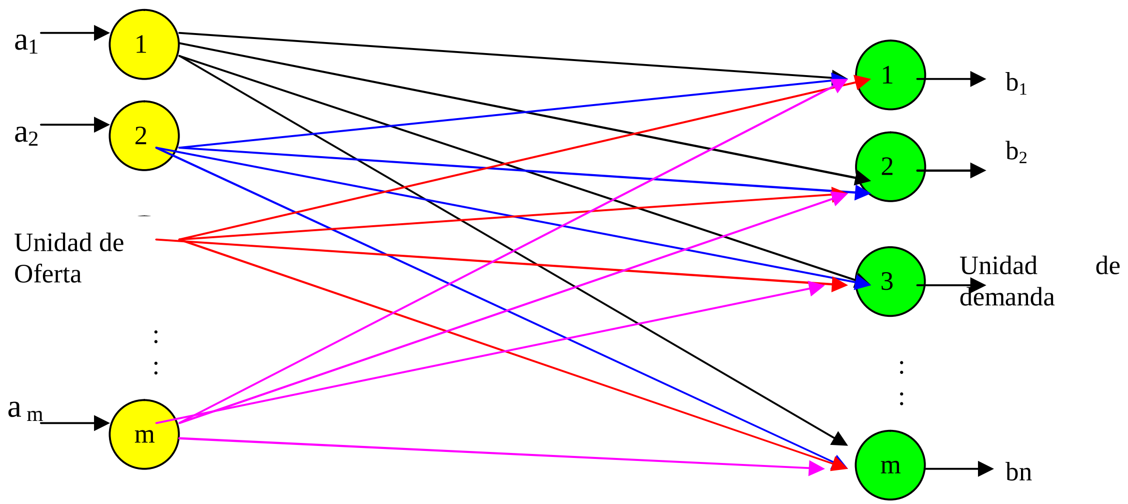
En esta oportunidad analizaremos la estructura de tres tipos de modelos el modelo de transporte, el modelo de Asignación y el modelo de Transbordo, tres tipos de modelos que son tratados con Programación Lineal y usar el Método Simplex para solucionarlos, destacando que existen algoritmos especializados para cada tipo de modelo y que en realidad son más efectivos.

En general los tres modelos tienen que ver con la determinación una planificación estratégica de costo mínimo, para el transporte de mercaderías de un conjunto de puntos que pueden ser considerados como bodegas o almacenes, si meditamos un poco podemos afirmar que se puede extender a control de Inventarios estructuras que serán vistas posteriormente.

Como se mencionó al inicio de este ítem el modelo de transporte puede ser solucionado por el algoritmo Simplex, pero existen técnicas para solucionar este tipo de problemas que recalcamos son más eficaces en términos d cálculo.

Presentaremos la forma estándar del modelo de transporte, posteriormente describimos sus variantes.

Supongamos que tenemos "n" destinos o centros de consumo y "m" centros fuentes u orígenes, debemos tener en cuenta que las fuentes de abastecimiento, origen, u oferta, las llegadas o destinos o demanda serán representados por círculos,



Consideremos

C_{ij} **= costo unitario de transportar entre el origen i a un destino j**

X_{ij} **= Cantidad transportada desde el origen i al destino j**

Entonces el modelo general de Transporte en Programación Lineal es:

$$\min : z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\textit{sujeto}\ \mathrm{a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge o, \qquad i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

Debemos resaltar que las primeras "m" restricciones nos dice que la suma de los envíos desde una fuente es menor o igual que su oferta.

Las restantes "n"restricciones nos dice que la cantidad recibida por el destino j de todos los posibles orígenes es igual o mayor que la cantidad requerida.

Pero tenemos otra versión del modelo que se conoce modelo de transporte en equilibrio

$$\min : z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\textit{sujeto}\ \mathrm{a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge o, \qquad i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

6.2. Ejemplos de aplicación del modelo de Transporte

1. Una empresa produce un producto en cuarto ciudad, Lima (L); Chimbote (C) Trujillo (T) y Arequipa (A), dicha producción se destina a tres centros de consumo I, II, y III. Se sabe que los centros productores disponen de 60, 80, 50, y 30, unidades de productos respectivamente; y los centros de consumo necesitan 70, 80 y 70 respectivamente. El costo unitario de transporte en soles es:

Centros productores	Centros de consumo		
	I	II	III
Lima (L)	5	6	8
Chimbote (C)	4	8	12
Trujillo (T)	12	No existe carretera	10
Arequipa (A)	3	6	9

Se pide formular un modelo de transporte para determinar un programa que minimice el costo total de transporte entre los cuatro centros productores y los tres centros de consumo.

Solución

$$\min : Z = 5x_{L1} + 6x_{LII} + 8x_{LIII} + 4x_{CI} + 8x_{CII} + 12x_{CIII} +$$

$$+12\mathrm{x}_{\mathrm{TI}} + Mx_{TII} + 10X_{TIII} + 3x_{AI} + 6x_{AII} + 9x_{AIII}$$

$$\text{Sujeto a:}$$

$$\begin{array}{lllll}
x_{LI} + x_{LII} + x_{LIII} & & & & = 60 \\
 & x_{CI} + x_{CII} + x_{CIII} & & & = 80 \\
 & & x_{TI} + x_{TII} + x_{TIII} & & = 50 \\
 & & & x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII} & = 30 \\
x_{LI} & + x_{CI} & + x_{TI} & \mathrm{x}_{\mathrm{AI}} & = 70 \\
x_{LII} & + x_{CII} & + x_{TII} & \mathrm{x}_{\mathrm{AII}} & = 80 \\
x_{LIII} & + x_{CIII} & + x_{TIII} & \mathrm{x}_{\mathrm{AIII}} & = 70
\end{array}$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{i\,j}} \geq 0; \quad \text{para } \mathrm{i = L, C, T, A; j = I; II; III.}$$

Es necesario observar que estamos utilizando el número M para poder decir que no existe camino pues este número es tan grande como fuera posible.
El modelo anterior es de equilibrio puesto que la demanda es igual a la oferta.

2. Supongamos que la empresa anterior solo tiene dos centros de consumo con 90 y 100 capacidad de consumo, y se pide estructurar un modelo también que minimice los costos totales del transporte.

Solución

En este caso se observa que la oferta es mayor que la demanda, entonces en estos casos se crea una centro de consumo ficticio III el modelo quedará así,

$$
\begin{aligned}
\min\ : Z &= 5x_{L1} + 6x_{LII} + 4x_{CI} + 8x_{CII} + \\
&\quad + 12x_{TI} + Mx_{TIII} + 3x_{AI} + 6x_{AII}
\end{aligned}
$$

Sujeto a :

$$
\begin{array}{llllll}
x_{LI} + x_{LII} + & & & & = 60 \\
 & x_{CI} + x_{CII} & & & = 80 \\
 & & x_{TI} + x_{TII} & & = 50 \\
 & & & x_{AI} + x_{AII} & = 30 \\
x_{LI} & + x_{CI} & + x_{TI} & \mathrm{x}_{AI} & = 90 \\
x_{LII} & + x_{CII} & + x_{TII} & \mathrm{x}_{AII} & = 100 \\
x_{LIII} & + x_{CIII} & + x_{TIII} & \mathrm{x}_{AIII} & = 30
\end{array}
$$

$\mathrm{x}_{ij} \geq 0$; para $i = L, C, T, A$; $j = I; II; III.$

El centro de consumo ficticio tiene una demanda igual a la diferencia de la oferta menos la demanda.
Debemos destacar que el mismo camino se sigue en el caso que la oferta sea menor que la demanda, es decir en este caso se crea un centro de abastecimiento ficticio con la diferencia entre la demanda y la oferta.

6.3. METODOLOGÍA PARA SOLUCIONAR UN MODELO DE TRANSPORTE

En esta oportunidad presentaremos la manera como se soluciona un problema de transporte, como ya mencionamos la metodología aplica los pasos del método Simplex, su diferencia radica solo en los detalles y las condiciones de Optimalidad y factibilidad.

Metodología

Primero: Determinar la solución básica factible sbf

Segundo: Determinar las variables que entran y que son elegidas del conjunto de variables no básicas, Si todas las variables satisfacen las condiciones de Optimalidad del método Simplex entonces deténgase ya encontró una solución optima, caso contrario continuar al paso siguiente.

Tercero: Determine las variables que salen usando las condiciones de factibilidad de las variables de la solución básica actual, luego obtenga la nueva solución básica y regresar al paso dos.

DETERMINACIÓN DE LA SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE INICIAL

En primer lugar debemos resaltar que cuando se considera la demanda igual a la oferta es decir $\sum_{i}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ se origina en el modelo de transporte una ecuación dependiente lo que significa que mencionado modelo tiene m + n-1 ecuaciones independientes, consecuentemente el una solución básica factible inicial debe de incluir n + m -1 variables básicas.

Una solución del modelo de transporte debe de satisfacer los siguientes requerimientos:

a) **Ser factible, esto es satisfacer todas las restricciones del modelo**
b) **Contener m + n -1 variables básicas**
c) **No formar en el cuadro solución, circuito cerrado con sus variable básicas**

Método de la Esquina Noroeste

Pasos:

Primero: Iniciar por la celda superior izquierda.

Segundo. Coloque en dicha celda un valor máximo posible permitido por la oferta o la demanda correspondiente.

Tercero: actualice los valores de la oferta y la demanda que fueron modificados en el paso (2).

Cuarto: siga a la celda derecha si existiera alguna oferta restante o regrese al paso (2), caso contrario siga para la celda inferior y regrese al paso (2)
La regla termina cuando la celda inferior derecha del cuadro es alcanzada.

Ejemplo. Consideremos el siguiente cuadro de costos de un modelo de transportes:

	1	2	3	4	Oferta
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	4	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Solución
Primero debemos de observar si se cumple el equilibrio del modelo de transporte en nuestro caso la demanda suma 27 y la oferta también 27. Entonces debemos de aplicar el método.

a) Iniciamos con la celda (1,1) y le asignamos 7 valor que permite la demanda y luego actualizamos la oferta es decir lo restamos la demanda, 9 - 7 = 2
b) Seguir para la celda (1,2) y le asignamos el valor máximo permisible en este caso es 2, y actualizamos la demanda 6 - 2 = 4
c) continuar hasta alcanzar la celda inferior derecha del cuadro de soluciones

	1	2	3	4	Oferta
1	7	2			~~9~~ , 2
2		4	6		~~10~~ , 6
3			4	4	8
Demanda	7	~~6~~ 4	~~10~~ , 4	4	

Luego entonces tenemos la solución básica factible: $X_{11} = 7$; $X_{12} = 2$; $X_{22} = 4$; $X_{23} = 6$; $X_{33} = 4$; $X_{34} = 4$; . Las otras variables que no están consideradas en la solución son las llamadas variables no básicas es decir: X_{13}; X_{14} ; X_{21} ; X_{24}, ; X_{31} ; X_{32} .
Debemos destacar que la solución básica factible inicial es obtenido sin considerar los costos del modelo solo se consideran la demanda y las oferta.

Método del Costo Mínimo
Debemos resaltar que este procedimiento proporciona la solución básica factible inicial la cual la determina considerando además de las ofertas y demandas, el costo de transporte , fenómeno que no considera la metodología anterior, lo que le permite determinar una solución más próxima a al realidad que la solución de Cantor Noroeste.

PROCEDIMIENTO

Primero. Localizar en el cuadro el menor costo que no tenga demanda u oferta nula.

Segunda. Coloque en la celda correspondiente del cuadro la solución la mayor cantidad permitida por la oferta y la demanda.

Tercero. Actualice los valores modificados de la demanda y oferta en el paso dos y regrese al paso 1.

El método continúa hasta que se agote todas las ofertas proporcionadas por los orígenes y todas las demandas permitidas por los destinos

Ejemplo Consideremos el mismo ejemplo anterior.

	1	2	3	4	Oferta
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	4	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Cuadro de costos

a) Seleccionamos la celda (2,1) , luego a esta celda se le atribuye el valor de 7 que es la demanda de origen dos y destino dos reduciendo la oferta a 3 unidades.

b)

	1	2	3	4	Oferta
1			9		~~9~~,
2	7	3			~~10~~,3
3				4	~~8~~ ,4
Demanda	~~7~~	~~6~~ ,3	~~10~~, 1	~~4~~	

Ejemplo 2.

	1	2	3	4	Oferta
1	10	7	6	5	9
2	6	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Cuadro de costos

Solución

	1	2	3	4	Oferta
1			9		~~9~~ ,
2	6			4	~~10~~ ,~~6~~
3	1	6	1		8
Demanda	~~7~~ ,1	~~6~~	~~10~~,1	~~4~~	

DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES NO BÁSICAS QUE ENTRAN A LA SOLUCIÓN BÁSICA.

Para determinar las variables no básicas que deben de ingresar a la base deben de cumplir con las condiciones de Optimalidad del método simplex.
Conocida la solución básica inicial, se debe de escribir la función objetivo solamente en función de las variables no básicas, con la finalidad de saber si la presente solución ya es óptima. En el caso que no lo sea, es necesario determinarlas variables que entran y salen de la base, con la finalidad de obtener una nueva solución básico compatible.

MÉTODO DE MULTIPLICADORES u_i v_j

Este método consiste en asociar u_i , y v_j con los i renglones y las j columnas de la tabla de transporte para cada variable básica X_{ij}, de la solución actual los multiplicadores deben de satisfacer la relación siguiente:

$u_i + v_j = c_{ij}$ **para cada variable básica, para solucionarlo podemos considerar un valor arbitrario que cumpla la primera relación y a partir de ello podemos determinar los demás.**

Lo que permite decir que la evaluación de cada variable no básica X_{pq} esta dada por lo siguiente:

$$\overline{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}, \text{ para cada variable no básica } X_{pq}$$

Luego seleccionamos la variable que entra
Veamos el último ejemplo 2.

$$\text{Variable básica } X_{13} : u_1 + v_3 = 6$$
$$\text{Variable básica } X_{21} : u_2 + v_2 = 2$$
$$\text{Variable básica } X_{24} : u_2 + v_4 = 1$$
$$\text{Variable básica } X_{31} : u_3 + v_1 = 11$$
$$\text{Variable básica } X_{32} : u_3 + v_2 = 12$$
$$\text{Variable básica } X_{33} : u_3 + v_3 = 8$$

Si en la primera relación hacemos $u_1 = 0$; los demás valore se tienen:
$V_3 = 6$; $V_2 = 10$; $u_2 = -7$, $V_1 = 9$; $V_4 = 8$; $u_3 = 2$., determinados los valores de las u_i y v_j ahora se puede obtener la función objetivo en función de las variables no básicas utilizando la siguiente relación

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} - u_i - v_j\right)x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

Pero observamos que basta calcular $c_{ij} - u_i - v_j$ para cada variable no básica y obtener los dos últimos sumatorias de la expresión:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i a_i = (0)(9) + (-7)(10) + (2)(8) = -54$$
$$\sum_{j=1}^{4} v_j b_j = (9)(7) + (10)(6) + (6)(10) + (8)(4) = 215$$

Determinando los coeficientes para las variables no básicas
Coeficiente X_{ij}: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$
Coeficiente X_{11}: 10 - 9 = 1
Coeficiente X_{12}: 7 -10 = - 3
Coeficiente X_{14}: 5 - 8 = - 3
Coeficiente X_{22}: 8 – (-7) -10 = 5

Coeficiente X_{23}: 9 – (-7) -6 = 10
Coeficiente X_{34}: 4 – 2 - 8 = -6
Finalmente obtenemos la función objetivo de la siguiente manera:

$$Z = 161 + X_{11} - 3\,X_{12} - 3X_{14} + 5X_{22} + 10X_{23} - 6\,X_{34}$$

Recordemos que en el modelo de transporte la función objetivo debe de ser minimizada, entonces la solución aún no fue alcanzada, pues los coeficientes de las variables X_{12}; $X_{14;}$ X_{34} son negativos y al ingresar a la base deben de disminuir al valor actual de la función objetivo.

Entonces la variable que debe de entrar en la nueva base es X_{34} por el hecho de presentar el menor coeficiente negativo (-6).

Debemos destacar que todo lo realizado algebraicamente se puede ejecutar con mayor rapidez usando los cuadros de costos y soluciones de la siguiente manera,

	1	2	3	4	Oferta
1	10 / 1	7 / -3	6 / o	5 / -3	9 ; $u_1 = 0$
2	2 / o	8 / 5	9 / 10	1 / o	10 ; $u_2 = -7$
3	11 / o	12 / o	8 / o	4 / -6	8 , $u_3 = 2$
Demanda	7	6	10	4	
	$v_1 = 9$	$V_2 = 10$	$V_3 = 6$	$V_4 = 8$	

Cuadro de costos

	1	2	3	4	Oferta
1			9		9
2	6 + Θ			4 + Θ	10
3	1- Θ	6	1	+ Θ	8
Demanda	7	6	10	4	

Cuadro Solución

Observemos el cuadro de costos:

a) los valores de C_{ij} - u_i -v_j en las celdas de las variables básicas fueron representadas por o, que simboliza los valores nulos.

b) los valores de u_i y de v_j calculados para anular los coeficientes de las variables básicas, son fácilmente determinados. Atribúyase por ejemplo a $u_1 = 0$ lo que permite determinar $v_3 = 6$, pues en la celda (1,3) marcada por (o) en necesario tener $c_{13} - u_1 - v_3 = 0$, de la misma manera conocido $v_3 = 6$ se determina en seguida el valor de $u_3 = 2$ de la misma manera obtenemos todos los valores de u_i y v_j .

c) La determinación de los coeficientes de las variables no básicas es facilitada .

d) Los valores de $\sum_{i=1}^{3} u_i a_i ; \sum_{j=1}^{4} v_j b_j$ se pueden obtener sin dificultad.

Determinación de la variable que sale de la Base

En esta oportunidad recordemos que hace el método simplex , debe de salir de la base la variable que se anulara más rápidamente cuando la variable que entra aumentara de valor . En realidad esto puede ser realizado en cuadros que veremos a seguir.

Metodología

a) **Imaginar que la variable X_{34} ingresa a la base con un valor $\theta \geq 0$ y que debe de ser el mayor posible.**
b) **Sumar y restar a los valores de ciertas variables básicas de tal modo que se cierre un circuito que garantice la compatibilidad de la nueva solución.**
c) **Determinar el mayor valor permitido de θ llamado $\theta_{\text{máx.}}$, esto es el valor de tita que genera la variable básica que se anula más rápidamente.**

$$X_{21} = 6 + \theta$$

$$X_{24} = 4 - \theta \geq 0. \qquad \Rightarrow \theta \leq 4$$

$$X_{31} = 1 - \theta \geq 0 \qquad \Rightarrow \theta \leq 1$$

De donde podemos tomar $\theta_{\text{máx.}} = 1$ y X_{31} es la variable que sale de la base por ser la variable que más rápidamente se anula, observemos que las demás variables no se altearan con el ingreso de la variable X_{34}

Después de determinar la variable que debe de ingresar X_{34} y la variable que sale de la base X_{31} los nuevos cuadros de soluciones y costos quedarán de la siguiente manera

	1	2	3	4	Oferta
1	10	7	6 o	5 -3	9 ; $u_1 = 0$
2	2 o	8	9	1 o	10 ; $u_2 = -7$
3	11	12 o	8 o	4 o	8 , $u_3 = 2$
Demanda	7	6	10	4	
	$v_1 = 9$	$V_2 = 10$	$V_3 = 6$	$V_4 = 8$	

Cuadro de costos

	1	2	3	4	Oferta
1			9		9
2	7			3	10
3		6	1	1	8
Demanda	7	6	10	4	

Cuadro Solución

Como observamos el en el cuadro solución tenemos una solución factible. Para saber si ella es óptima es necesario calcular los u_i y v_j y reiniciar el proceso. Para el cual repetimos los cuadros y realizamos todos los cálculos para determinar la nueva solución

	1	2	3	4	Oferta
1	10 7	7 -3	6 o	5 3	9 ; $u_1 = -2$
2	2 o	8 -1	9 4	1 o	10 ; $u_2 = -3$
3	11	12 o	8 o	4 o	8 , $u_3 = 3$
Demanda	7	6	10	4	
	$v_1 = 5$	$V_2 = 12$	$V_3 = 8$	$V_4 = 4$	

Cuadro de costos

Usando el cuadro de costos determinamos u y v para saber que variable ingresa a la base así: supongamos $u_3 = 0$; de manera análoga al primer paso determinamos los demás valores de u y de v: $v_2 = 12$; $v_3 = 8$; $v_4 = 4$ con la finalidad de anular los coeficientes de las variables básicas X_{32}; X_{33}; X_{34}; y $u_1= -2$; $u_2= -3$ para eliminar los coeficientes X_{13} ; X_{24} con los valores de u_2 y de $v_1 = 5$ se anula el coeficiente de X_{21}.

Una ves determinados estos valores se requiere determinar los coeficientes de las variables no básicas usando $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ cuyos valores se encuentran indicados ya en el cuadro de costos debe de ingresar la variable X_{12}, por tener (-3) el valor más negativo.

A seguir se realiza el circuito cerrado de los Θ como se indica

a) **Imaginar que la variable X_{12} ingresa a la base con un valor $\theta \geq 0$ y que debe de ser el mayor posible.**
b) **Sumar y restar a los valores de ciertas variables básicas de tal modo que se cierre un circuito que garantice la compatibilidad de la nueva solución.**
c) **Determinar el mayor valor permitido de θ llamado $\theta_{\text{máx.}}$, esto es el valor de tita que genera la variable básica que se anula más rápidamente.**

	1	2	3	4	Oferta
1		+ Θ	9 - Θ		9
2	7			3	10
3		6 - Θ	1 + Θ	1	8
Demanda	7	6	10	4	

$$X_{13} = 9 - \theta \qquad \Rightarrow \theta \leq 9$$

$$X_{32} = 6 - \theta \geq 0. \qquad \Rightarrow \theta \leq 6$$

$$X_{331} = 1 + \theta \geq 0$$

De donde podemos tomar $\theta_{\text{máx.}} = 6$ y X_{13} es la variable que sale de la base por ser la variable que más rápidamente se anula, observemos que las demás variables no se altearan con el ingreso de la variable X_{12}
Lo que implica los nuevos cuadros

	1	2	3	4	Oferta
1	10 7	7 o	6 o	5 3	9 ; $u_1 = 0$
2	2 o	8 2	9 4	1 o	10 ; $u_2 = -1$
3	11 6	12 3	8 o	4 o	8 , $u_3 = 2$
Demanda	7	6	10	4	
	$v_1 = 3$	$V_2 = 7$	$V_3 = 6$	$V_4 = 2$	

Cuadro de costos

	1	2	3	4	Oferta
1		6	3		9
2	7			3	10
3			7	1	8
Demanda	7	6	10	4	

Del último cuadro de de costos se concluye que la presente solución es optima pues los coeficientes de las variables no básicas $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ **son todos positivos teniéndose la variables básicas siguientes:**

$$X_{12}^* = 6; X_{24}^* = 3; X_{13}^* = 3; X_{33}^* = 7; X_{21}^* = 7; X_{34}^* = 1;$$

y todas las variables no básicas son ceros

$$\sum_{i=1}^{3} u_i a_i = (0)(9) + (-1)(10) + (2)(8) = 6$$

$$\sum_{j=1}^{4} v_j b_j = (3)(7) + (7)(6) + (6)(10) + (2)(4) = 131$$

Llagándose a la siguiente función objetivo:

Z = 137 +7 X_{11} + 3 X_{14} +2X_{22} +4X_{23} +6X_{21} +3 X_{32} = 137 es el valor óptimo pues todas las variables son nulas por ser no básicas. Pero debemos resaltar que otra manera de encontrar el valor optimo de la función objetivo es:

$$Z^* = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij} X_{ij} = 7(6) + 6(3) + 2(7) + 1(3) + 8(7) + 11(1) = 137$$

6.4. ESTRUCTURA Y COSNTRUCCIÓN DEL MODELO DE ASIGNACIÓN

Supongamos que en el modelo de transporte consideramos las siguientes restricciones:

1. **El número de orígenes = al número de destinos es decir (m = n);**
2. **Capacidad de cada origen = 1 es decir $a_i = 1$ para todo i.**
3. **La demanda de cada destino = 1 es decir $b_j = 1$ para todo j.**

Lo que permite reestructurar el modelo de transporte de la siguiente manera:

$$\min : z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$sujeto \text{ a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq o, \quad i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n$$

Se observa que solamente cada origen i solo abastecerá a un destino j, lo que quiere decir que las restricciones del modelos ahora serán equivalentes a lo siguientes

$$X_{ij} \begin{cases} = 1, \text{ si al origen i se le designa para abastecer el destino j} \\ = 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$$

El problema entonces resulta determinar como las asignaciones deben de ser hechas de tal manera que se minimice el costo total.

En realidad el modelo de transporte por las características especiales admite un algoritmo especial para obtener su solución óptima.
El modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, entonces admite un algoritmo especial. Pues veamos lo siguiente,

DESTINOS					
O		1	2	……..	N
R	1	C_{11}	C_{12}	….	C_{1n}
I	2	C_{21}	C_{22}	…..	C_{2n}
G					
E	…				
N	N	C_{n1}	C_{n2}	…….	C_{nn}

Es necesario tener en consideración que los problemas de asignación ocurren cuando se tienen que distribuir una cantidad determinada de ítems como hombres, máquinas, etc. a una cantidad igual de localizaciones tales como tarifas locales etc.

Por ejemplo el jefe de un departamento quiere saber como debe de distribuir cinco supervisores en sus cinco divisiones de tal manera que la eficiencia de su departamento sea la máxima por esta razón es que se acostumbra de hablar de matriz de eficiencia al problema de asignación.

Debemos destacar la existencia de un teorema que afirma: Si adicionamos una constante a cada elemento de una línea o columna de la matriz de eficiencia de un problema de asignación, la solución óptima de la matriz alterada será también la solución de la matriz inicial

Consecuentemente el proceso consistirá en obtener una matriz de eficiencia alterada que sea equivalente a la original, y que no tenga ningún elemento negativo y presentando el mayor número posible de elementos nulos de manera que el la solución óptima presente el valor de:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} k_i = z + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Destaquemos que la relación anterior nos induce a decir que el valor absoluto de Z^*
Es igual a suma de las constantes que fueron utilizadas en la transformación de la matriz de eficiencia.

Ejemplos como asignar hombres y tareas

Supongamos que estamos interesados en asignar 4 operarios a 4 tareas de tal manera que el número de hombre – hora sea mínimo. Si cada hombre realiza cada tarea en un determinado número de horas como se indica la siguiente matriz,

	OPERARIOS					Menor elemento de cada fila
TAREAS		I	II	III	IV	
	A	5	24	13	7	(5)
	B	10	25	3	23	(3)
	C	28	9	8	5	(5)
	D	10	17	15	3	(3)

Como al modificar la matriz no se puede colocar elementos negativos es necesario determinar los menores elementos de cada línea indicados en la fila de la matriz de eficiencia y luego restarlos de todos los elementos de cada línea y luego tenemos:

	OPERARIOS				
TAREAS		I	II	III	IV
	A	0	19	8	2
	B	7	22	0	20
	C	23	4	3	2
	D	7	14	12	0
			(4)		

De igual manera realizamos con las columnas

	OPERARIOS				
TAREAS		I	II	III	IV
	A	0	15	8	2
	B	7	18	0	20
	C	23	0	3	2
	D	7	10	12	0
			(4)		

Luego se puede realizar la asignación óptima de la siguiente manera:

Hombre	Tarea
I	A
II	C
III	B
IV	D

El tiempo total que se debe de gastar es determinado por la matriz de eficiencia inicial , sumando los tiempos que cada hombre gasta en su tarea.

$T_{total} = 5 + 3 + (5+4) +3 = 20$

El mismo valor puede sacare si sumamos los valores sacados de cada línea y cada comuna.
Debemos destacar que en el ejemplo anterior de la modificación de la matriz inicial por la sustracción de los elementos mínimos de las líneas y de las columnas, nos proporcionó una solución óptima obvia, pero en lo general esto es casi difícil que ocurra todo lo que se puede asegurar es que después de las sustracciones indicadas se han obtenido en lo mínimo ceros en cada línea y cada columna. Pero esos ceros no siempre permiten la obtención de una solución óptima.

Ejemplo Como seleccionar hombres y locales

El presidente de una empresa esta estudiando la transferencia de cuatro directores para cuatro locales de trabajo diferentes. Se realizaron estimativas de costos considerados en las transferencias de cada hombre para cada nuevo local de trabajo y se presentan a seguir:

	LOCALES					Menor elemento de cada fila
DIRECTORES		I	II	III	IV	
	A	2	1	4	2	(1)
	B	3	4	1	6	(1)
	C	1	2	6	5	(1)
	D	1	3	3	7	(1)

Determinar las asignaciones de cada director para cada local de trabajo de modo a minimizar el costo de transferencia, asumiendo que los directores son igualmente calificados por los diversos servicios.
Solución:
Restando a cada elemento el mínimo de cada fila se tiene

	LOCALES				
DIRECTORES		I	II	III	IV
	A	1	0	3	1
	B	2	3	0	5
	C	0	1	5	4
	D	0	2	2	6

De manera análoga lo realizamos para cada columna

	LOCALES				
DIRECTORES		I	II	III	IV
	A	1	0	3	X
	B	2	3	0	4
	C	0	1	5	3
	D	X	2	2	5
		(0)	(0)	(0)	(1)

El paso siguiente es asignar los directores a los locales para obtener la solución óptima pero nos encontramos con dos dificultades fundamentales:
Para el director A se le puede asignar los locales II y IV se alije arbitrariamente
Para el director B se le asigna el local III no existe problema
Para el director C se le asigna el local II pero es necesario observar que también puede ser asignado el director D se selecciona arbitrariamente y se elimina el otro cero.
Para el director D no quedo ningún cero en la matriz final lo que indica que la asignación no es óptima.

Entonces surge la siguiente pregunta que hacer para obtener nuevos ceros en la matriz final. Para esto es necesario cubrir todos los ceros de la matriz final con el menor número posible de rectas en nuestro caso será:

	LOCALES				
DIRECTORES		I	II	III	IV
	A	1	0	3	0
	B	2	3	0	4
	C	0	1	5	3
	D	0	2	2	5

Observamos que el menor costo no cubierto es (1) que corresponde a la celda (C,II) de la última matriz y si restamos ese costo a cada uno de los elementos de la matriz obtendremos un nuevo cero en dicha celda pero sin embargo aparecerán costos negativos en todas las celdas que tengan ceros cubiertos por las rectas es decir:

	LOCALES				
DIRECTORES		I	II	III	IV
	A	0	-1	2	-1
	B	1	2	-1	3
	C	-1	0	4	2
	D	-1	1	1	4

Pero la matriz final no puede presentar elementos negativos es necesario sumar uno (1) a las líneas o columnas cubiertas por las rectas, con la finalidad de restaurar los ceros que fueron destruidos por la operación anterior

	LOCALES				
DIRECTORES		I	II	III	IV
	A	2	X	3	0
	B	3	3	0	4
	C	X	0	4	2
	D	0	1	1	4

El proceso de las dos operaciones es lo siguiente:

i. restar el menor costo (1) de las celdas no cubiertas por las rectas
ii. sumar este valor a los costos de las celdas que se encuentran en las intersecciones de las rectas es decir a las celdas (A, I) y (B,I)

Finalmente se pasa a asignar los directores a los locales con ceros obteniendo de esta manera una solución óptima.

DIRECTOR	LOCALES
A	IV
B	III
C	II
D	I

6.5. ALGORITMO PARA UN MODELO DE ASIGNACIÓN

Todas las operaciones se realizan teniendo la matriz de eficiencia.

Primero. Restar el elemento mínimo de cada línea a todos los elementos de de aquella línea y hacer lo mismo con las columnas.

Segundo. Analizar las columnas y líneas de manera secuencial, para cada una con un cero exactamente y reservar esa posición para una asignación y eliminar los otros ceros de las columnas y filas, en caso de empate elegir cualquier cero. Repetir el proceso para todas las líneas y columnas sin posición reservada. Si las posiciones reservadas completan las asignaciones entonces la solución es óptima, caso contrario ir al siguiente paso.

Tercero. Trazar un número mínimo de rectas para cubrir todos los ceros de la siguiente manera

i. Marcar todas las líneas que no tengan asignación
ii. Marcar todas la columnas que no tengan ceros en líneas no marcadas
iii. Marcar todas las líneas que tengan asignación en columnas marcadas
iv. Repetir los pasos i y iii hasta no ser posible marcar líneas o columnas
v. Trazar un recta sobre cada línea no marcada y sobre cada columna marcada
vi. Analizar todos los elementos no cubiertos por una recta, seleccionar el elemento mínimo de todos ellos y restarlo de todos esos elementos no cubiertos por una recta. Y sumar ese elemento mínimo a cada elemento situado en la intersección de dos rectas y regresar al segundo paso.

Ejemplo General

Una empresa cuenta con cuatro locales I, II, III, IV, para ubicar tres máquinas nuevas A, B, C , sin embargo el cuarto local no puede permitir la ubicación de la maquina A por restricciones físicas, el costo de ubicación para cada máquina con respecto a las posiciones es dado a seguir

	I	II	III	IV
A	5	1	3	X
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2

Se pide minimizar el costo total de asignación de las nuevas máquinas.

Solución

Primero debemos realizar las siguientes algunas observaciones antes de usar el algoritmo de asignación, tales como:

i. Atribuir un costo un costo muy elevado o penalizar con M a la posición (A, IV) con la finalidad de evitar la asignación de la máquina tipo A al cuatro local.

ii. Crear una máquina ficticia D con costos nulos, la finalidad de igualar el número de locales disponibles.

	I	II	III	IV
A	5	1	3	M
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2
D	0	0	0	0

A seguir aplicamos los tres pasos del algoritmo de asignación

	I	II	III	IV	
A	4	0	2	M	(1)
B	2	0	3	2	(1)
C	1	1	2	0	(2)
D	0	0	0	0	(0)

	I	II	III	IV	
A	4	0	2	M	(1)
B	2	0	3	2	(1)
~~C~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~(2)~~
~~D~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~(0)~~

El costo mínimo no cubierto por las rectas es 2 y aplico el paso cuatro del algoritmo ala última matriz la cual se transforma en:

	I	II	III	IV
A	2	0	0	M
B	0	0	1	X
C	1	3	2	0
D	0	2	0	X

A esta ultima matriz aplicamos el paso dos del algoritmo pero se llega a la conclusión de aplicar arbitrariedad, por tener dos ceros para A así mismo para B y de igual manera para C. Pero debemos destacar que esto nos esta indicando más de una solución óptima.

Se llega al siguiente matriz

	I	II	III	IV	
A	2	0	x	M	
B	0	x	1	x	
C	1	3	2	0	
D	x	2	0	x	

Pero recordemos que la máquina D es ficticia entonces ya tenemos una solución óptima

Máquinas	Local
A	III
B	II
C	IV

6.6. Ejercicios sobre transporte y asignación

1. Aplicar el modelo de transporte para establecer el mejor plan si se tiene el siguiente matriz de costos unitarios, se sugiere aplicar el método u-v.

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	9	12	9	6	9	10	5
2	7	3	7	7	5	5	6
3	6	5	9	11	3	11	2
4	6	8	11	2	2	10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	

2. Una empresa tiene sus locales de producción en tres ciudades I, II, III que proveen a sus almacenes ubicados en A, B, C, D, Las capacidades mensuales de producción de cada local es 70,, 90, y 115 respectivamente y las necesidades de los almacenes son 50, 60, 70, 95 si se tienen como costos unitarios de transporte lo siguiente.

	A	B	C	D
I	16	14	13	12
II	15	14	20	15
III	14	12	24	13

Establecer el plan óptimo de transporte.

3. Resolver el siguiente problema de transporte:

	1	2	3	oferta
1	20	20	30	80
2	24	15	50	50
3	20	20	40	60
Demanda	80	40	90	

4.. Una empresa suministra artículos a tres clientes cada uno necesita 40 unidades, la empresa tiene 2 almacenes siendo que el almacén 1 dispone de 50 unidades y el almacén dos 40 unidades . La matriz siguiente representan los costos de envió del almacén a cada cliente.

Almacén	Clientes		
	I	II	III
1	20	20	25
2	10	50	40

Existe una multa por pedido no cumplido, por cada unidad no surtida del pedido del cliente uno se incurre a un costo de penalización de 100. Por cada unidad no surtida del pedido del cliente 2 se incurre a un costo de penalización de 90 de manera análoga para el cliente tres se penaliza con 120. Plantear un plan de transporte balanceado para minimizar la suma de los costos de escasez y de envío.

Resolver el siguiente problema de asignación

1.

	1	2	3	4	5
A	12	8	9	7	6
B	8	9	6	6	8
C	9	6	5	4	7
D	7	7	4	6	6
E	9	8	9	5	6

2.

	1	2	3	4	5
A	2	5	7	7	6
B	5	4	4	6	7
C	4	6	5	4	4
D	7	7	4	6	3
E	7	8	9	5	6

3. La UCV quiere inscribir a cuatro alumnos a un concurso de TGS, Matemáticas, Algoritmos, Estructura de datos, un alumno solo puede ser inscrito en un curso, por que las pruebas son simultáneas. Con la finalidad de seleccionar de sus cuatro mejores alumnos A, B, C, D aplica los mismos exámenes cubriendo las cuatro áreas del concurso siendo la matriz siguiente el resultado de las pruebas.

	TGS	MAT	ALG,	ESt-datos
A	17	20	16	13
B	18	17	18	11
C	14	19	13	15
D	15	14	16	19

Cual debe ser la selección de los alumnos.

4. Se encuesta con cinco empleados para realizar 4 trabajos. La siguiente matriz proporciona el tiempo que usa cada persona para realizar cada trabajo determine la asignación de los empleados a los trabajos que minimice el tiempo total requeridos para realizar los cuatro trabajos.

PERSOAL	Tiempo (horas) por trabajo			
	I	II	III	IV
1	22	18	30	20
2	18	X	28	25
3	25	20	25	30
4	20	25	X	35
5	15	X	30	30

5. El ministerio de transportes recibe oferta para cuatro rutas de ómnibus escolares de la ciudad, las empresas realizan las siguientes ofertas

Empresas	Oferta en soles por ruta			
	I	II	III	IV
1	4000	5000	x	x
2	x	4000	x	4000
3	3000	x	2000	X
4	x	X	4000	5000

Considere que solo se puede asigna una ruta a cada licitador use el algoritmo de asignación para minimizar de operación de las cuatro rutas.

6.5. Algoritmo de Transbordo

Trabajo obligatorio para la casa grupos de cuatro como mínimo
Debe de contener.
Introducción
Estructura del modelo
Ejemplos desarrollados
Ejercicios propuestos.
Libros de consulta:
1.- Hamdy A. Taha Investigación de operaciones
2.- Frederick S. Hillier; Gerald J. Liberman, Introducción a la Investigación de Operaciones.
3. Kamleshj Mathur , Daniel Solow Investigación de Operaciones , el arte de la toma de decisiones.

UNIDAD VII

VII. MODELO DE REDES. Y PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS CON PERT-CPM:

7.1. MODELOS DE REDES "TEORÍA DE GRAFOS"ALCANCES DE LAS APLICACIONES

En esta ocasión nos proponemos ha analizar un conjunto de problemas importantes de optimización tales como por ejemplo.

a) Construir una red de tuberías de agua para conectar los distritos de Trujillo, teniendo como objetivo minimizar el costo de construcción.
b) Determinar la ruta más corta que une dos ciudades en una red de caminos existentes.
c) Determinar la capacidad diaria máxima en litros de una red de agua.
d) Determinar un programa de flujo de costo mínimo de los campos petrolíferos a las refinerías a través de una red de datos.
e) Determinar el tiempo óptimo, para el inicio y fin de un conjunto de obras, proyectos de construcción.

Estos cinco casos nos induce a estudiar 5 algoritmos de optimización de redes. ie.

1. Árbol de extensión mínima.
2. Algoritmo de la recta más corta.
3. Algoritmo de flujo máximo.
4. Algoritmo de redes capacitadas de costo mínimo.
5. Algoritmo de la ruta crítica. C.P.M. o PERT

7.2. DEFINICIONES BÁSICAS DE REDES

Red o Grafo: es un conjunto denotado por G (N, A) en donde:

N: conjunto de nodos; $\{x_i, i = 1,......,n\}$ se lee nodo x_i, o simplemente por números

A: conjunto de arcos o ramas = $\{(x_i, x_j), i = 1, j = 1.., i \neq j\}$

Arco: esta formado por un par ordenado de nodos y representa una posible grandeza que ocurre entre los dos nodos.

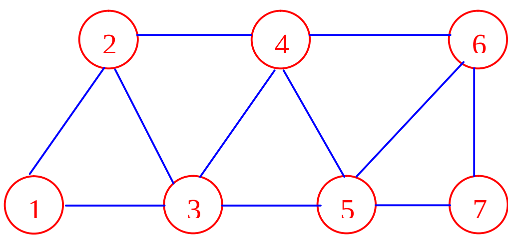


Fig. (1)

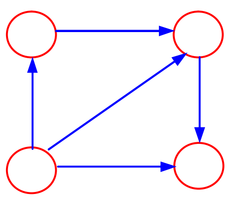
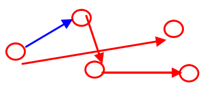


Fig. (2)

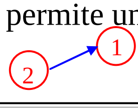
x_i: es el nodo inicial del arco.

x_j: es el nodo final del arco.

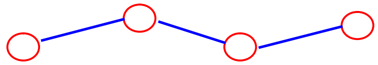


Arco Dirigido u Orientado.

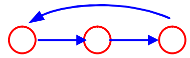
Se llama así cuando permite un flujo o grandeza en una dirección y cero en dirección contraria.



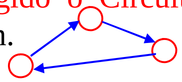
Trayectoria o Ruta: Es una secuencia de ramas o arcos distintos que conectan dos nodos sin importar la dirección del flujo de cada rama.



Lazo o Ciclo: si se conecta un nodo consigo mismo. (1, 2) (2, 3) (3, 1)

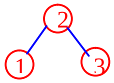


Lazo Dirigido o Circuito: es un lazo donde todas las ramas tienen la misma dirección u orientación.

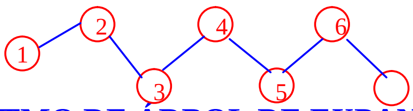


Red Conectada: es una red donde cada dos nodos distintos están unidos por lo menos por una trayectoria o ruta. (1 2) (2 3) (3 4)

Árbol: es una red conectada que puede incluir solo un subconjunto de todos los nodos de la red.



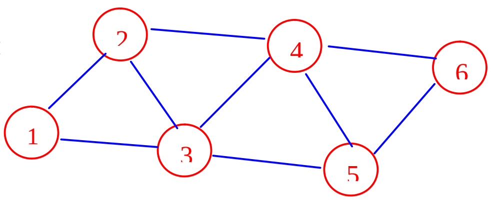
Árbol de Expansión: es una red conectado que incluye todos los nodos sin permitir lazos.



7.3.ALGORITMO DE ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Este algoritmo consiste en unir los nodos de una red directa o indirectamente, usando la longitud más corta de las ramas conectadas, si ciclos.
Una aplicación consiste en construir carreteras que unan varias ciudades donde estas pasan por otras intermedias.

Algoritmo:



Dado el conjunto de nodos de una red N:
N = {1, 2, 3,........n}
C_k : Conjunto de todos los nodos conectados permanentemente en la iteración k del algoritmo.
$\bar{C}_k$: Conjunto de nodos que todavía no se han conectado en la iteración k.

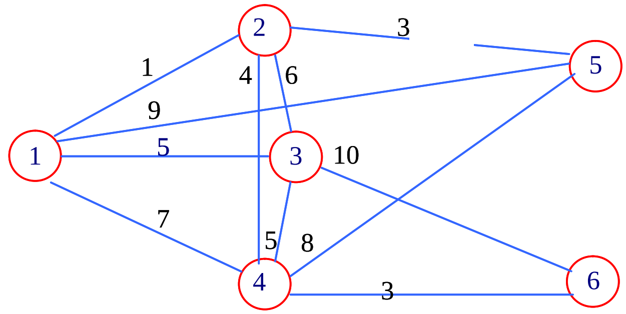
Paso 0: tenemos $C_0 = \phi$, $\bar{C}_0 = N$

Paso 1: inicios con cualquier nodo i del conjunto $\bar{C}_0$ y definir $C_1 = \{i\}$, $\bar{C}_1 = N - \{i\}$
Hacer: k = 2
Paso General K: Seleccionar un nodo j*, en el conjunto no conectado, $\bar{C}_{k-1}$ que produce la rama mas corta hacia un nodo en el conjunto conectado C_{k-1} unir j* con C_{k-1} y eliminar de $\bar{C}_{k-1}$ ie.

$C_k = C_{k-1} + [j^*]$; $\bar{C}_k = \bar{C}_{k-1} - \{j^*\}$

Si, $\bar{C}_k = \phi$, detenerse caso contrario k = k + 1

EJEMPLO: La telefónica se encuentra en proceso de proporcionar su servicio a 6 nuevas áreas urbanizadas. La siguiente figura representa las uniones entre las seis áreas, en millas de cable se encuentran en cada rama. Determinar la red más económica de cable .



Solución:

Aplicación del Algoritmo

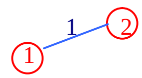
Inicio: N = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Paso “0”: $C_0 = \phi$; $\overline{C}_0 = N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Paso “1”: Iniciar en cualquier i: de $\overline{C}_0$; i = 1 k = 1

$C_1 = \{1\}$; $\overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

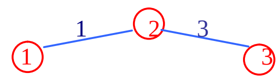
Paso “2”: min {i _ j}; j ≠ i = min {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)} = j = 2



$C_2 = \{C_1 + \{j\}\} = \{1, 2\}$, $\overline{C}_2 = \overline{C}_1 - \{2\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$C_2 = \{1, 2\}$; $\overline{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

Paso “3”: min {i _ j}; j ≠ i = min {(2, 3), (2, 4), (2, 5)} = j = 5

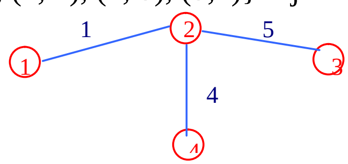


$C_3 = \{1, 2, 3\}$; $\overline{C}_3 = \{3, 4, 6\}$

Paso “4”: min {i _ j}; j ≠ i = min {(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (5,4)} = j = 4

(1,5)

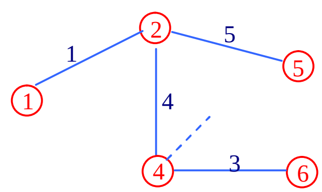
$C_4 = \{1, 2, 3, 4,\}$; $\overline{C}_4 = \{3, 6\}$



Paso “5”: min {(1, 3), (2, 3), (4, 5), (4, 6)} = j = 6

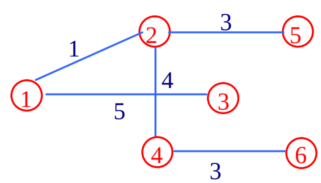
(4, 3)

$C_5 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$; $\overline{C}_5 = \{3\}$



Paso”6”: min {(1, 3), (2, 3), (4, 3)} = j = 3 ; 2 -3

$C_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\overline{C}_6 = \phi$ 4 -3



Cable: 16 kmts.

Ejemplos: sobre definiciones.

1.) Dado la siguientes redes determinar:

(a) Una recta o trayectoria: (1,2) (2,6) (6,3) (3,10)

(b) Un lazo o un ciclo. (1,2) (2,1) (1,2) (2,6) (6,3) (3,10) (10,1)

(c) Un circuito o lazo dirigido, red conectada. (2,6) (6,3) (3,2) (5,7) (7,11) (11,4)

(d) Un árbol (1, 2) (2, 6) (6, 3)

(e) Una red de expansión (1,2) (2,3) (2,6) (6,7) (7,11) (11,4) (4, 9) (9,10) (3,5) (5,4)

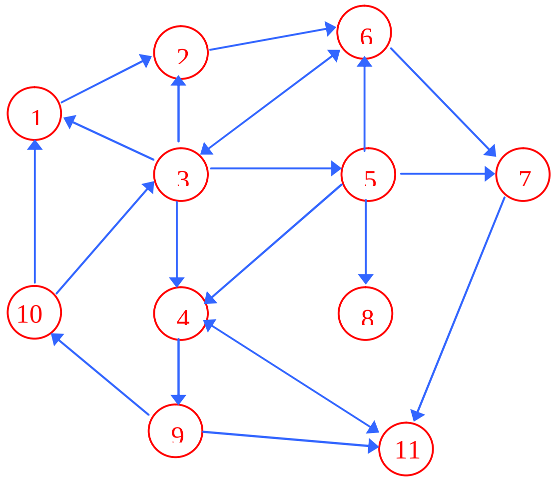


Fig. (1)

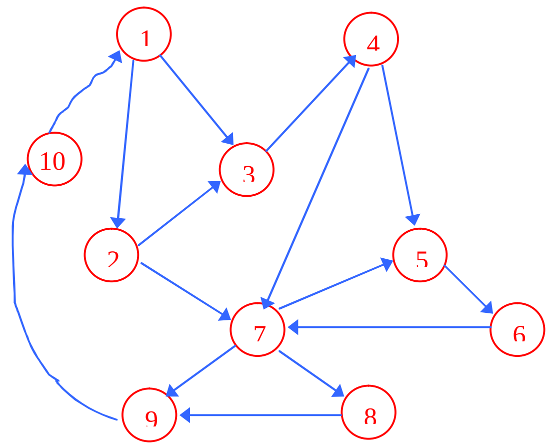
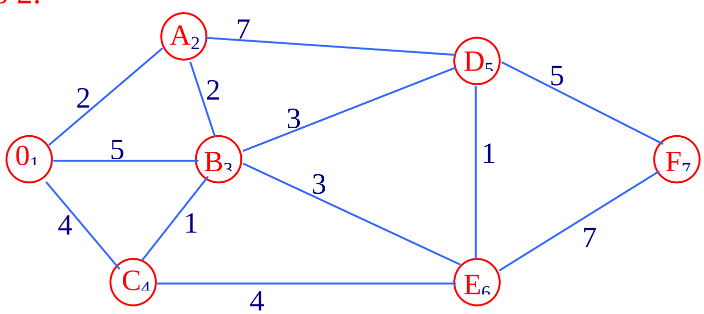
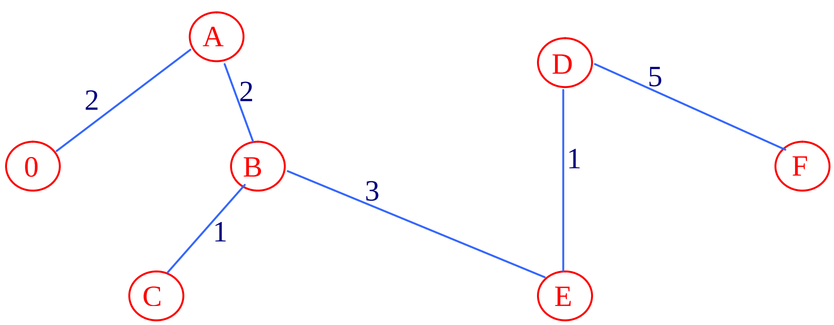


Fig. (2)

Ejemplo 2:

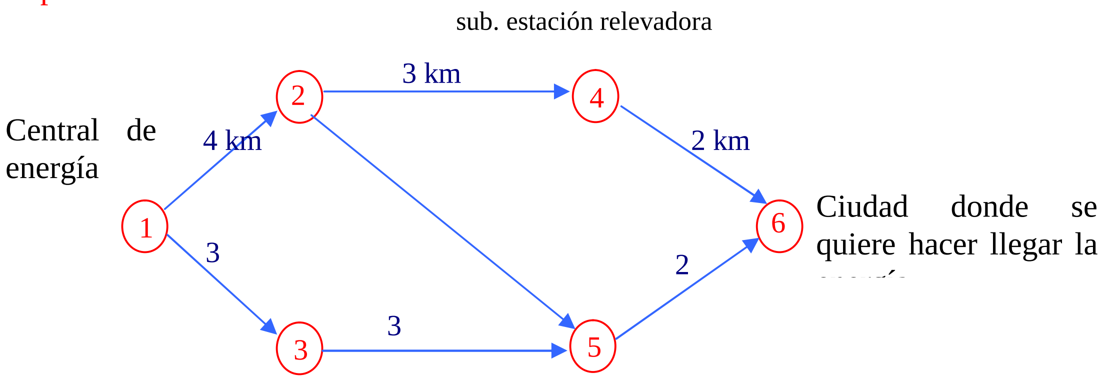


Solución del árbol expansión mínima



7.4. PROBLEMA DE RUTA MÁS CORTA

Ejemplo 1:



- La empresa quiere que la energía viaje la menor distancia.
- Considerando que el costo de transporte es proporcional a la distancia.

Ejemplo 2:

Un automóvil cuesta 12,000 dólares, el costo de mantenimiento depende de la edad del auto al inicio del año (ver tabla). Con la finalidad de evitar el costo de mantenimiento alto, se da como cota inicial de un nuevo, que es valorado de acuerdo a su edad (ver tabla). Mi preocupación es minimizar el costo neto incurrido en los próximos 5 años.

C_N Costo de compra Costo de Mantenimiento El dinero recibido por la venta

C_N C_C C_M C_V

Durante los próximos 5 años

Formule como un P R .M .C.

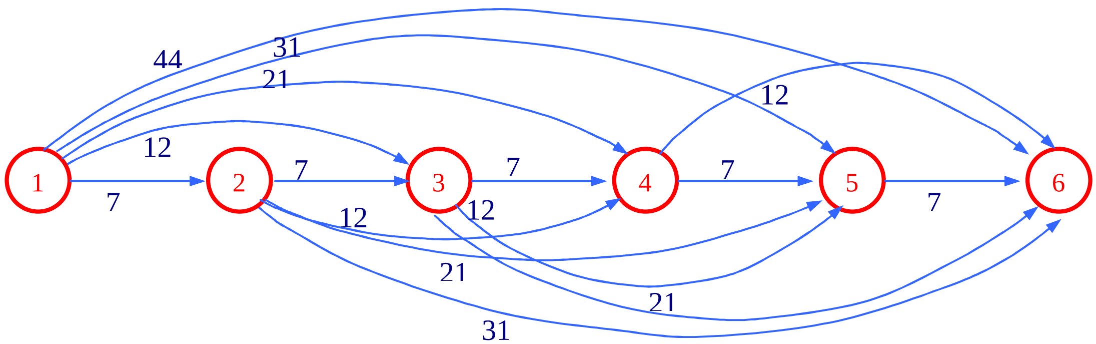
PRECIO DE MANTEN. ANUAL	EDAD DEL AUTO	PRECIO DEL AUTO POR COTA INICIAL
2000	0 1	7000
4000	1 2	6000
5000	2 3	2000
9000	3 4	1000
12000	4 5	50

Solución:

- La red tendría {1,2,3,4,5,6} seis nodos el nodo i corresponde al inicio del año i; para i < j

- El arco (i, j) corresponde a la compra del auto nuevo al inicio del año i y conservarlo hasta el inicio del año j.
- La longitud del arco (i, j): llamado $C_{i,j}$ es el costo neto total incurrido por ser el dueño y tener el auto desde el inicio del año i hasta el principio del año j, si se compra un auto nuevo al inicio del año i y se da como adelanto al inicio del año j

$C_{i,j}$ Costo de mantenimiento durante los años i, i+1, i+2,...j – 1
Costo de compra del auto al inicio del año i
Valor del auto al dar como adelanto al inicio del año j



En miles de soles:

$C_{12} = 2 + 12 - 7 = 7$
$C_{13} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$
$C_{14} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$
$C_{15} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31$
$C_{16} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 12 - 0.05 = 44$
$C_{23} = 2 + 12 - 7 = 7$
$C_{24} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$
$C_{25} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$
$C_{26} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31$
$C_{34} = 2 + 12 - 7 = 7$
$C_{35} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$
$C_{36} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$
$C_{45} = 2 + 12 - 7 = 7$
$C_{46} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$
$C_{56} = 2 + 12 - 7 = 7$

Significado de la ruta

12 + 21

1 3 6 $\boxed{33}$

Se mantiene hasta el inicio al año 3 y se da como adelanto.

1 3 5 6 = 40

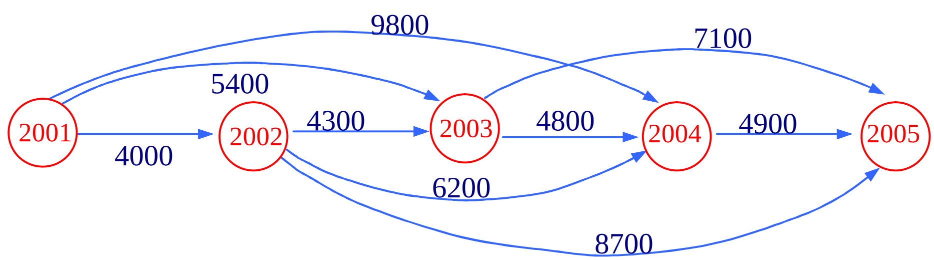
21 12 7

Ob: que cada ruta desde el nodo 1 al 6 es el costo neto incurrido durante los próximos 5 años, que corresponde a una estrategia específica de cambiar el automóvil.

Ejemplo: Supongamos que entregamos el auto como adelanto al principio del año 3 y después doy este automóvil como adelanto al final del año 5, es decir al inicio del año 6 esta estrategia corresponde a la ruta 1-3-6,
La longitud de la ruta será el costo neto total incurrido durante los próximos 5 años.
Ob: que la longitud del camino más corto del nodo 1 al nodo 6 es el costo neto mínimo que se puede presentar al manejar un automóvil durante los 5 años próximos.

Ejemplo:
Una empresa de alquiler de carros desarrolla un plan de reemplazo para un horizonte de 5 años (2001 – 2005) se toma la decisión al principio de cada año si se mantiene el auto o lo reemplaza, el auto debe estar en servicio como mínimo un año, pero se debe remplazarlo después de 3 años. El cuadro siguiente represente el costo de reemplazo como función del año que se adquiere el auto y el número de años en operación.

AÑO EN EL QUE SE ADQUIERE	COSTO DE REEMPLAZO POR UNIDAD MONETARIO POR DETERMINADOS AÑOS DE OPERACIÓN		
20001	1	2	3
20002	4000	5400	9800
20003	4300	6200	8700
20004	4800	7100	———
20005	4900	———	———



7.5. ALGORITMO DE LA RUTA MÁS CORTA

En esta oportunidad trataremos de representar la manera como solucionar el P .R. M .C. de una red cíclica o acíclica, es decir analizamos los algoritmos de:

- Dijkatra
- Floyd

7.6. ALGORITMO DE DIJKSTRA CÍCLICO

Supondremos que todos los arcos tienen valores no negativos, en este caso se aplicará el llamado algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta.

Este algoritmo esta estructurado par determinar la ruta mas corta entre el nodo de origen y cada uno de los otros dados de la red.

- En este algoritmo se considera que la longitud de todos los arcos son positivos.
- Los cálculos del algoritmo avanzan de un nodo i a un nodo j inmediato siguiente, utilizando el criterio de clasificación.:

- Usa el procedimiento siguiente
  u_i: distancia mas corta del nodo 1 (origen) al nodo i
  $d_{i,j}$: longitud del arco (i, j)
  Clasificamos el nodo j así:
  $[u_{j,i}] = [u_i + d_{i,j}, i], \; d_{i,j} \geq 0$
- Los nodos según Dijkatra se clasifican en temporales y permanentes.
- Una clasificación temporal se puede reemplazar por otra clasificación si se encuentra otra ruta más corta.

Pasos:

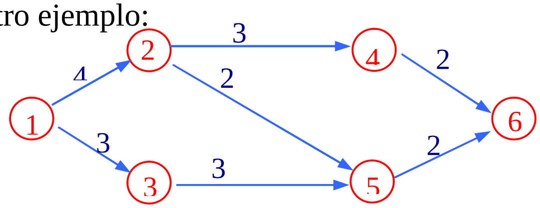
Paso 0: Clasifica el nodo origen con [0, –] y determine i = 1

Paso i: a.) Calcular las clasificaciones temporales $[u_i + d_{i,j}, i]$ para cada nodo j al que se puede llegar desde el nodo i. Siempre que el nodo j no sea clasificado como permanente. Tomar el mínimo de todos los nodos clasificados temporales

Si el nodo j ya esta clasificado con $[u_j, k]$ a través de otro nodo k y si $u_i + d_{i,j} < u_j$, reemplazar $[u_j, k]$ por $[u_i + d_{i,j}, i]$.

b.) Si todos los nodos tienen nodos permanentes, deténgase, caso contrario seleccionar la clasificación $[u_r, s]$ con la distancia más corta u_r entre todas las clasificaciones temporales. Romper el importe temporalmente.

Tomando nuestro ejemplo:



Iteración 0: Al nodo 1 se le asigna [0, –] si se clasifica.

Iteración 1: Es posible llegar a los nodos 2 Λ 3 partiendo del nodo 1:

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[0 + 4, 1] = [4, 1]	Temporal
3	[0 + 3, 1] = [3, 1]	Temporal

min {[4,1], [3,1]} = [3,1] corresponde al nodo “3” este pasa a estado permanente.

Iteración 2: Del nodo 3 se puede llegar al 5.

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[4, 1]	Temporal
3	[3, 1]	Permanente
5	[3 + 3, 1] = [6, 3]	Temporal

min. {[4,1]; [6,3]} = [4,1] corresponde al nodo “2” este pasa a estado permanente.

Iteración 3: Del nodo 3 se llega hasta 4 y 5.

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[4, 1]	Permanente
3	[3, 1]	Permanente
4	[7,2]	Temporal
5	[6, 3]	Temporal
	[6, 2]	

min {[7,2]; [6,2]; [6,3]} = [6,3] ⟶ el nodo “5” cambia.
[6,2]

Iteración 4: Del nodo 5 se llega hasta 6.

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[4, 1]	Permanente
3	[3, 1]	Permanente
4	[7,2]	Temporal
5	[6, 2]	Permanente
	[6, 3]	
6	[8, 5]	Temporal

min. {[7,2]; [8,5]} = [7,2] el nodo “4” cambia a permanente.
Iteración 5: Del nodo 4 se llega hasta 6.

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente

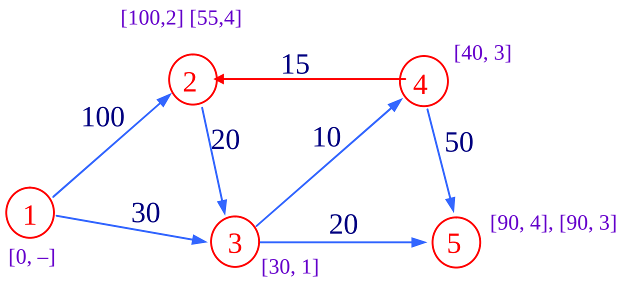
2	[4, 1]	Permanente
3	[3, 1]	Permanente
4	[7, 2]	Permanente
5	[6, 2] ó [6, 3]	Permanente
6	[8, 5]	Temporal

min. [8,5] = el nodo “6” este pasa a estado permanente.

6 → [8, 5] → 5 → [6, 2] → 2 → [4, 1] → 1 ⟹ 1 → 2 → 5 → 6 — 8 Unidades

6 → [8, 5] → 5 → [6, 3] → 3 → [3, 1] → 1 ⟹ 1 → 3 → 5 → 6 — 8 Unidades

Ejemplo:



T_1

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[0 + 100, 1] = [100, 1]	Temporal
3	[0 + 30, 1] = [30, 1]	Temporal

T_2: Desde el nodo 2 se llega a los nodos 4 y 5, se clasifican en:

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[100, 1]	Temporal
3	[30, 1]	Permanente
4	[40, 3]	Temporal
5	[90, 3]	Temporal

T_3: Desde el nodo 4 se puede llegar a los nodos 2 y 5, la lista se clasifican en:

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Temporal

3	[30, 1]	Permanente
4	[40, 3]	Permanente
5	[90, 4] ó [90, 3]	Temporal

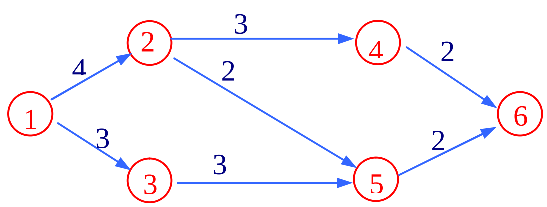
El nodo 2 se puede clasificar como Permanente.

T_5: Desde el nodo 2 solo se llega al nodos 3 que es permanente no se puede clasificar, luego la lista será:

NODO	CLASIFICACIÓN	ESTADO
1	[0, –]	Permanente
2	[55, 4]	Permanente
3	[30, 1]	Permanente
4	[40, 3]	Permanente
5	[90, 4]	Temporal

Observación: El nodo 5 es el único temporal debido a que este no lleva a otro nodo, su estado se convierte a permanente y termina.

ALGORITMO DE DIJKATRA



Inicio: – Escribir a todos los nodos una etiqueta temporal.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$

– Colocar al nodo inicial uno permanente un cero.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$

Primero: $k = 1$ Cálculo de etiquetas temporales a partir de la última permanente.

min {Valor permanente + distancia a los nodos unidad}

min {0 + 4} = 4 para nodo 2.

min {0 + 3} = 9 para nodo 3.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4 & 3 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$ Ver el número de todos los temporales.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4 & 3* & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$ Nodo $\boxed{3}$ tiene el permanente.

Segundo: k = 2 Repitiendo 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4 & 3* & 00 & 6 & 00 \end{bmatrix}$$ min {00, 3 + 3} = 6

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 00 & 6 & 00 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Etiqueta permanente nodo $\boxed{2}$

Tercero: k = 3

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4 & 3* & 7 & 6 & 00 \end{bmatrix}$$ min {00, 4 + 3} = 7 nodo 4
min { 6, 4 + 2 } = 6 nodo 5

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 7 & 6* & 00 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Etiqueta permanente nodo $\boxed{5}$

Cuarto: k = 4

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 7 & 6* & 8 \end{bmatrix}$$ min {00, 6 + 2} = 8

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 7* & 6* & 8 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Etiqueta permanente nodo $\boxed{4}$

Quinto: k = 5

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 7* & 6* & 8 \end{bmatrix}$$ min {8, 7 + 2} = 9

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0* & 4* & 3* & 7* & 6* & 8* \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Etiqueta permanente nodo } \boxed{6}$$

EJERCICIOS

ALGORITMO ACICLIDA DIJKSTRA

Consideremos el nodo i, uno y el nodo final (7)

$d_{i,j}$: Distancia entre el nodo i, el nodo j, se indica en la rama.

u_j: Distancia mas corta entre el nodo 1 el nodo j.

u_1: = o por definición.

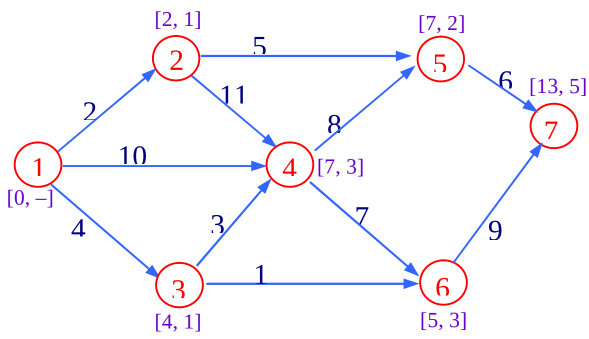
u_j: se calcula en forma j = 1,2,3,.....,n

$$u_j = \min_i \begin{pmatrix} \text{la dis tan cia } u_i \text{ mas corta un nodo i inmediatamente anterior} \\ + \text{la dis tan cia } d_{ij} \text{ entre el nodo actual j y su predecesor i} \end{pmatrix}$$

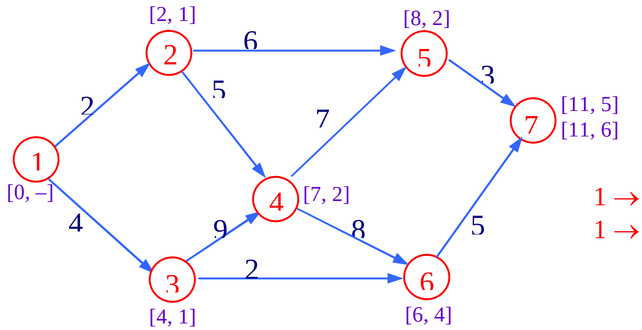
$$u_j = \min_i \{u_i + d_{ij}\}$$

Usando: la etiqueta del nodo j = [u_i, n]

N: es el nodo precedente inmediatamente a j.



$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 = 13$



1 → 4 → 6 → 7 = 11
1 → 2 → 5 → 7 = 11

$$u_j = \min_i \{u_i + d_{i,j}\}$$

NODO	DISTANCIA MÁS CORTA HASTA DESDE	ETIQUETA
1	$u_1 = 0$	[0, –]
2	$u_2 = \min_i \{u_i + d_{i,2}\} = \min \{u_1 + d_{1,2}\}$ $u_2 = \min \{0 + 2\} = 2$ desde 1	[2, 1]
3	$u_3 = \min_i \{u_i + d_{i,3}\}$ $= \min \{u_1 + d_{1,3}\} = 4$ desde 1 $0 + 4$	[4, 1]
4	$u_4 = \min_i \{u_i + d_{i,4}\}$ $= \min \{u_1 + d_{1,4}; u_2 + d_{2,4}; u_3 + d_{3,4}\}$ $\{0 + 10, \quad 2 + 11, \quad 4 + 3\} = 7$ desde 3	[7, 3]
5	$u_5 = \min_i \{u_i + d_{i,5}\}$ $= \min \{u_2 + d_{2,5}; u_4 + d_{4,5}\}$ $\{2 + 5, \quad 7 + 8\} = 7$ desde 2	[7, 2]

6	$u_6 = \min\{u_i + d_{i,6}\}$ i $= \min\{u_3 + d_{3,6};\ u_4 + d_{4,6}\}$ $\{4 + 1,\quad 7 + 7\} = 5$ desde 3	[5, 3]
7	$u_7 = \min\{u_i + d_{i,7}\}$ i $= \min\{u_5 + d_{5,7};\ u_6 + d_{6,7}\}$ $\{7 + 6,\quad 5 + 9\} = 13$ desde 5	[13, 5]

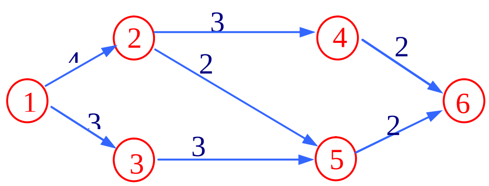
Solución:

$1 \xrightarrow{\ 2\ } 2 \xrightarrow{\ 7\ } 5 \xrightarrow{\ 6\ } 7 = 13$ unidades de 3 unidades de grandeza.

$7 \rightarrow [13,5] \rightarrow 5 \rightarrow [7,2] \rightarrow 2 \rightarrow [2,5] \rightarrow 1$

Recta $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ con 13 unidades

7.7. ALGORITMO PARA UNA RED ACÍCLICA



Se basa en el cálculo recursivo

Inicio: - Nodo inicial: nodo 1 (fuente u origen)

- Nodo final: nodo 6
- $d_{i,j}$: Distancia entre el nodo actual j y su predecesor i se indica en la rama.
- Red: acíclica
- u_j = distancia más corta entre el nodo 1 y nodo j; i = 1, 2,.....,n
- $u_1 = 0$
- u_i = distancia más corta a un nodo i inmediatamente anterior j.
- $u_j = \min.\{\ u_i + d_{i,j}\}$

i

Usamos la etiqueta j = [u_j, n]

n: nodo que procede inmediatamente a j.

NODO	CALCULO $u_j = \min \{ u_i + d_{i,j}\}$ I	ETIQUETA
1	$u_1 = 0$	[0, –]
2	$u_2 = \min \{u_1 + d_{1,2}\} = 4$ desde nodo 1 1	[4, 1]
3	$u_3 = \min \{u_1 + d_{1,3} \} = 3$ desde 1 $0 + 3$	[3, 1]
4	$u_4 = \min = \{u_2 + d_{2,4}\}$ $\{4 + 3\} = 7$ desde 2	[7, 2]
5	$u_5 = \min \{u_2 + d_{2,5}; u_3 + d_{3,5}\}= 6$ $\{4 + 2, \quad 3 + 3\} = 3$	[6, 3] [6, 2]
6	$u_6 = \min \{ u_4 + d_{4,6}; u_5 + d_{5,6}\}$ $\{7 + 2, \quad 6 + 2\}$	[8, 5]

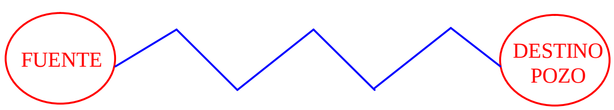
$$6 \rightarrow [8,5] \rightarrow 5 \rightarrow [8,5] \rightarrow \begin{array}{l} [6,3] \rightarrow 3 \rightarrow [3,1] \rightarrow 1 \\ [6,2] \rightarrow 2 \rightarrow [4,1] \rightarrow 1 \end{array}$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ ó $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

7.8. PROBLEMA DEL FLUJO MÁXIMO

INTRODUCCIÓN

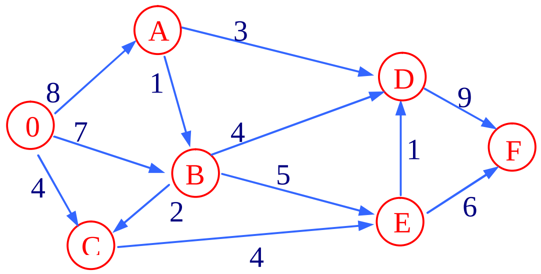
- Recordemos que muchos problemas de una red se pueden modelar en la cual se considera un arco con capacidad limitada. Para decir se quiere transportar la máxima cantidad de flujo desde un punto de partida (fuente) o un punto final (pozo) ie.



Al respecto diremos que existen muchos algoritmos especializados para dar solución a los P.F.M.

Observación:

1. Se debe considerar una red dirigida.
2. Tiene una fuente y destino (pozo).
3. Los otros nodos son de trasbordo.
4. Capacidad de los arcos.
5. El objetivo es determinar el patrón factible de flujo a través de la red que maximice el flujo total desde la fuente de destino.



7.9. ALGORITMO DE TRAYECTORIA AUMENTADA DE FORD FULKERSON

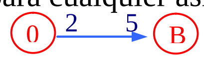
Se fundamenta en dos conceptos intuitivos, Red Residual y Trayectoria Aumentada.

Red Residual y Trayectoria aumentada

1. Asignando flujos a los arcos de la red original.
   La red residual muestra las capacidades restantes 1° capacidad residual.

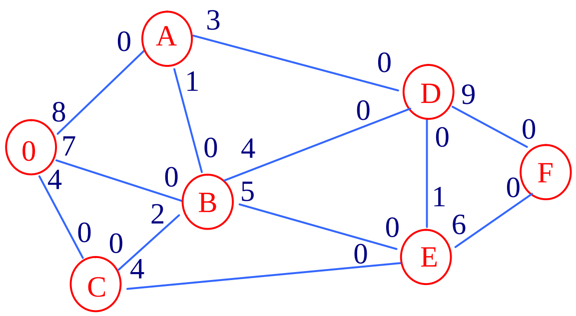
   Ejemplo:

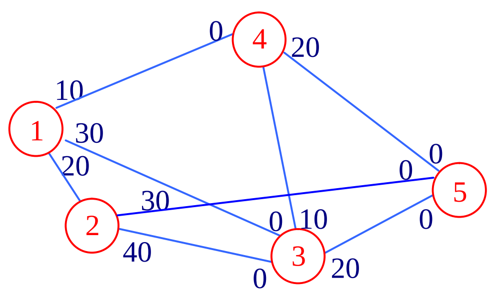
   Consideremos el arco $0 \to B$ tiene una capacidad de arco 7, supongamos que el flujo asignado es 5, lo que deja una capacidad residual 7 – 5 = 2 para cualquier asignación de flujo adicional a través de $0 \to B$ y se describe así



   2 para el flujo de 0 a B

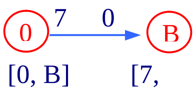
   5 para el flujo de B a 0





Sea el arco (i, j) con capacidad inicial $\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}$

Para un nodo j que recibe un flujo del nodo i define: $[a_j, i]$

a_j: es el flujo del nodo i al nodo j 

Paso 1: Para todos los arcos (i, j) determine la capacidad residual igual a la capacidad inicial $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{c}_{ij}, \overline{c}_{ji})$

Sea, $a_1 = \infty$ el nodo origen $[\infty, –]$ hacer i = 1, ir al paso 2.

Paso 2: Determine s_i como los nodos determinado no clasificados j a los que se pueden llegar directamente des de i por medio de arcos positivos $c_{ij} > 0 \;\; \forall \;\; j \in s_i ; s_i \neq \phi$ ir a 3 sino al 4.

Paso 3: Determine $k \in s_i$ de manera que

$$c_{ik} = \max_{j \in s_i} \{c_{ij}\}$$

Determine $a_k = c_{ik}$ y clasifique el nodo k en $[a_k, i]$, si el nodo final se ha clasificado ir al paso 5 caso contrario determine i = k y vaya al paso 2.

Paso 4: (Retroceso) Si i = 1, no son posibles otras penetraciones adicionales ir al paso 6. Caso contrario, sea r el nodo que se ha clasificado inmediatamente antes del nodo actual i, eliminar i del conjunto de nodos que están adyacentes a r hacer i = r vaya al paso 2.

Paso 5: (Determinación de la red residual)

Sea $N_p = \{1, k_1, k_2, ..., n\}$ definimos los nodos de la ruta de penetración a la p desde el punto inicial 1 al nodo final n.

Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula

$f_p = \min \{a_1, a_{k1}, a_{k2}, ..., a_n\}$, con respecto a k.

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de penetración se disminuye en f_p en dirección del flujo y se le aumenta en f_p en dirección inversa es decir para los nodos i y j en la ruta, en el flujo residual se cambia de

$$(c_{ij}, c_{ji}) \rightarrow \text{a) } (c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p) \text{ si el flujo es de i a j}$$

$$\text{b) } (c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p) \text{ si el flujo es de j a i}$$

Reintegrar cualquier nodo que se eliminaron al paso 4.

Determine i = 1 y regrese al paso para intentar una nueva ruta de penetración.

Paso 6: Solución

a.) Dado que se ha determinado m rutas de penetración calcule el flujo máximo en la red así:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_m$$

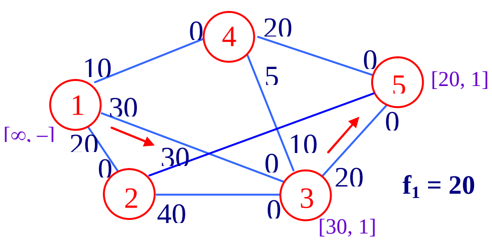
b.) Dado que los residuales inicial y final del arco (i,j) son dados $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})(c_{ij}, c_{ji})$ el flujo optimo se calcula:

$$(\alpha, \beta) = (\bar{c}_{ij} - c_{ij}, \bar{c}_{ji} - c_{ji})$$

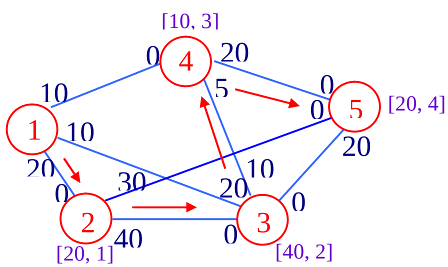
si $\alpha > 0$ el flujo optimo de i a j es α

si $\beta > 0$ el flujo optimo de j a i es β

Ejemplo 2:



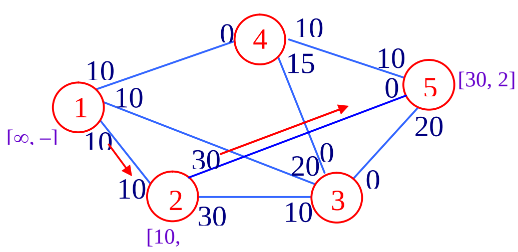
f_1 = 20



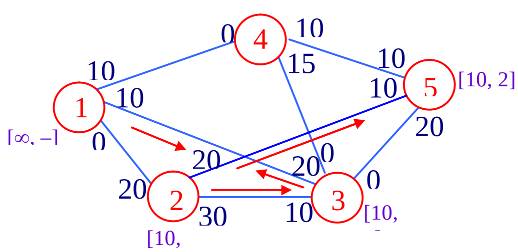
f_2 = 10

$$(c_{ij}, c_{ji}) = (\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$$

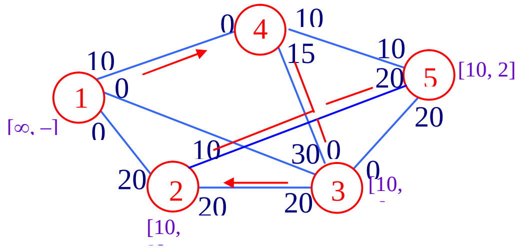
Residual Inicial — Residual Inicial



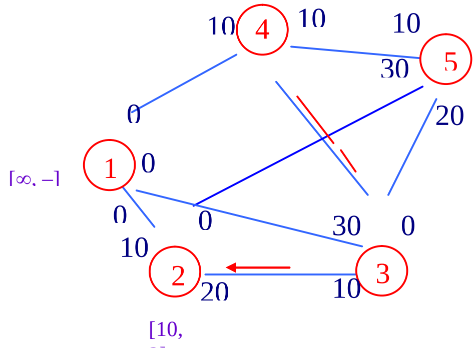
F_3 = 10



F_4 = 10



$\mathbf{F_5 = 10}$

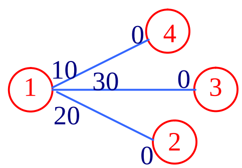


No existe penetración

Paso 1: Hacemos $a_1 = \infty$, clasificamos el nodo 1 con $[\infty, -1]$ hacemos i = 1.

Paso 2: Determinamos

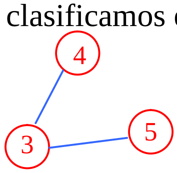
$s_1 = \{2, 3, 4\} \neq \phi$



Paso 3: k = 3 debido que $c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\}$

Determinamos $a_3 = c_{13} = 30$, clasificamos el nodo 3 con [30,1] repetir el paso 2

Paso 2: $s_3 = \{4, 5\} \neq \phi$



Paso 3: k = 5 $c_{35} = \max\{c_{34}, c_{35}\} = \max\{10, 20\}$

Hacemos: $a_5 = c_{35} = 20$

Clasificamos el nodo 5 con [20, 3]

Se logra la penetración, vaya al paso 5.

Paso 5: La ruta de penetración se determina de las clasificaciones empezando el nodo 5 y terminando en el uno 1.

ie: $5 \to [20,3] \to 3 \to [30,1] \to 1$ luego $N_p = \{1,3,5\}$

$f_1 = \min\{a_1, a_3, a_5\} = \min\{\infty, 30, 20\} = 20$

Capacidad residual a lo largo de la ruta N_1 son:

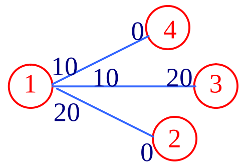
$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$

$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$

ITERACIÓN 2.

Paso 1: Hacemos $a_1 = \infty$ y clasificamos el nodo 1 $[\infty, -]$, hacer i = 1.

Paso 2: $s_1 = \{2, 3, 4\} \neq \phi$



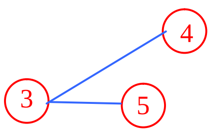
Paso 3: k = 2 mas

$c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 10, 10\} = 20$

$a_2 = c_{12} = 20$

Etiqueta del nodo 2 [20, 1] ¿Se alcanzó el nodo final? No

Paso 2: $s_2 = \{2, 3, 4\} \neq \phi$



Paso 3: k = 3 mas

$c_{23} = \max\{c_{23}, c_{25}\} = 40$; $a_3 = c_{23} = 40$

Clasificamos el nodo 3: [40, 2]; i = 3, repetir el paso 2.

Paso 2: $s_3 = \{4\}$ no tomamos c_{35} mas no existe ie $c_{35} = 0$

Paso 3: k = 4, $c_{34} = 10$, $a_4 = c_{34} = 10$, clasificamos el nodo 4 [10,3], i = 4 repetir paso 2

Paso 2: $s_3 = \{5\} \neq 0$

Paso 3: k = 5, mas: $c_{45} = \max\{c_{45}\} = 20$,

$a_5 = c_{45} = 20$, clasificaremos el nodo 5: [20, 4] se ha logrado una penetración ir al paso 5.

Paso 5: la ruta de penetración se determina de las clasificaciones iniciando en el nodo 5 y terminando en el nodo 1.

$$5 \rightarrow [20,4] \rightarrow 4 \rightarrow [10,3] \rightarrow 3 \rightarrow [40,2] \rightarrow 2 \rightarrow [20,1] \rightarrow 1 \rightarrow [\infty,-]$$

Entonces $N_2 = \{1,2,3,4,5\}$

$$f_2 = \min\{\infty,20,40,10,20\} = 10 \Rightarrow f_2 = 10$$

Los residuales a través de la ruta N_2 es:

$(c_{12}, c_{21}) = (20 – 40, 0 + 10) = (10, 10)$

$(c_{23}, c_{32}) = (40 – 10, 0 + 10) = (30, 10)$

$(c_{34}, c_{43}) = (10 – 10, 5 + 10) = (0, 15)$

$(c_{45}, c_{54}) = (20 – 10, 0 + 10) = (10, 10)$

ITERACIÓN 3.

Paso 1: Hacer $a_1 = \infty$ y clasificamos el nodo 1 con $[\infty, –]$, hacemos i = 1.

Paso 2: $s_i = \{1, 3, 4\} \neq \phi$

Paso 3: k = 3, mas: $c_{2k} = \max \{10,10,10,10\} = 10$

Hacer: $a_2 = c_{12} = 10$, clasificando 2 [10,1], hacemos i = 2 ir al paso 2.

Paso 2: $s_3 = 0$, $c_{34} = c_{35} = 0$, ir al paso 4 para retroceder.

Paso 4: i = 3, el nodo 3 da el nodo r = 2 inmediatamente anterior, eliminamos el nodo 3 y determinamos i = r = 2.

Paso 2: $s_2 = \{5\}$ Observación: el nodo 3 es eliminado en el paso de retroceso.

Paso 3: k = 5, $c_{2k} = c_{25} = 30 \Rightarrow a_5 = 30$ clasificamos el nodo 5 [30,2] se logro una penetración, ir al paso 5.

Paso 5: $5 \rightarrow [30,2] \rightarrow 2 \rightarrow [10,5] \rightarrow 1[\infty,-]$ $N_3 = \{1,2,5\}$

$f_3 = \min \{\infty,30,10\} = 10 \Rightarrow f_3 = 10$

$(c_{12}, c_{21}) = (10 – 10, 10 + 10) = (0, 20)$

$(c_{25}, c_{52}) = (30 – 10, 0 + 10) = (20, 10)$

ITERACIÓN 4. Se refiere análogamente y se tiene:

$N_4 = \{1,3,2,5\}$ $f_4 = 10$

ITERACIÓN 5. Se repite y se tiene:

$N_5 = \{1,4,5\}$ $f_5 = 10$

ITERACIÓN 6. No es posible determinar penetraciones adicionales pues todos los arcos fuera del nodo 1 residuales cero, ir al paso 6.

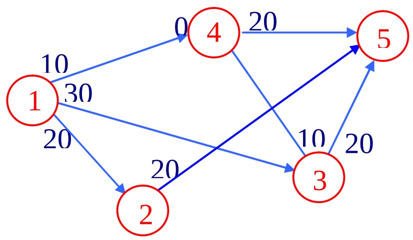
Paso 6: Determinar la solución.

E l flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10$

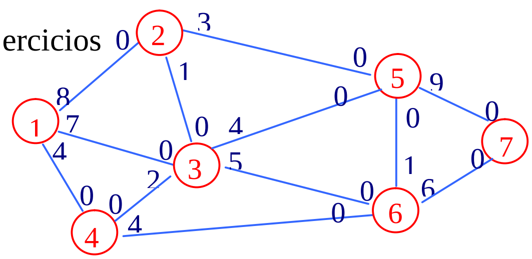
F = 60 unidades.

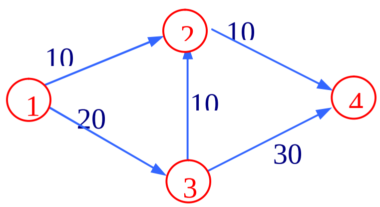
El flujo en los diferentes arcos se calcula restando los últimos residuales en la iteración 6 ie $(c_{ij}, c_{ji})_6$ de las capacidades iniciales $\left(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}\right)$ así:

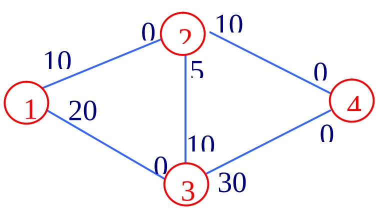
ARCO	$\left(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}\right) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	FLUJO	DIRECCIÓN
(1, 2)	(20, 0) – (0, 20) = (20, –20)	20	$1 \to 2$
(1, 3)	(30, 0) – (0, 30) = (30, –30)	30	$1 \to 3$
(1, 4)	(10, 0) – (0, 10) = (10, –10)	10	$1 \to 4$
(2, 3)	(40, 0) – (40, 0) = (40–40, 0)	0	0
(2, 5)	(30, 0) – (10, 20) = (30–10, –20)	20	$2 \to 5$
(3, 4)	(10, 5) – (0, 15) = (10–0, 5–15)	10	$3 \to 4$
(3, 5)	(20, 0) – (0, 20) = (20–0, 0–20)	20	$3 \to 5$
(4, 5)	(20, 0) – (0, 20) = (20–0, –20)	20	$4 \to 5$



Ejercicios

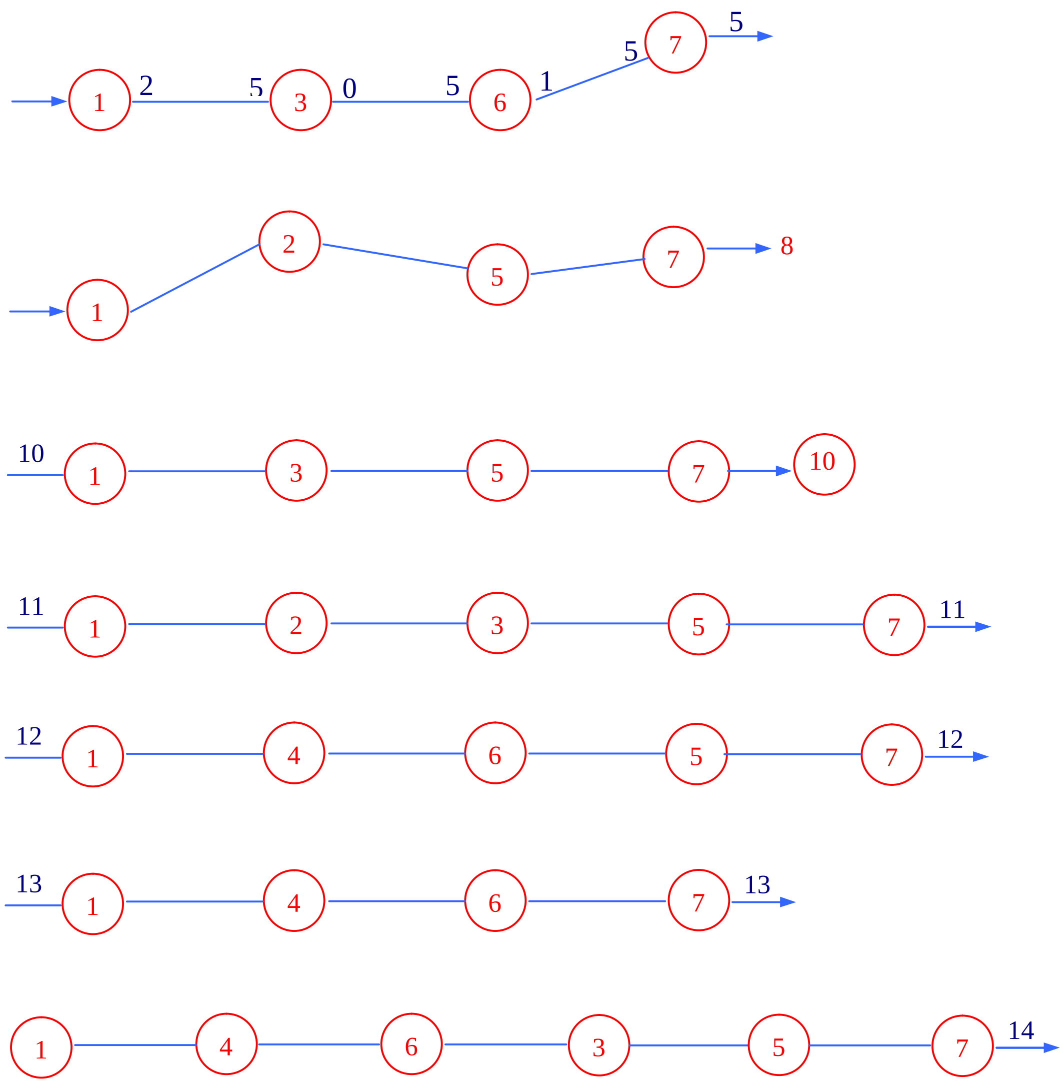






Algoritmo:

1. Se identifica una trayectoria de aumento
   Si fuera posible determinar la trayectoria entonces
2. Determinar la capacidad residual min {7, 5, 6} = c* = f*
   C* = 5
3. Se disminuye en c* la capacidad residual de cada arco en la dirección de la trayectoria.
   Se aumenta en c* la capacidad residual de cada arco en la dirección opuesta a la trayectoria.



7.10. PROBLEMA DE FLUJO RESTRINGIDO DE COSTO MÍNIMO

Este problema generaliza el P.F.M. en los aspectos siguientes:

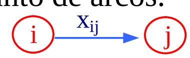
i) Todos los arcos son direccionales (Un sentido)
ii) Un costo de flujo por unidad (no negativo) esta asociado con cada arco.
iii) Los arcos pueden tener límites positivos de capacidad inferior.
iv) Cualquier nodo en la red puede actuar como un punto de origen.
El modelo que pretendemos construir determina los flujos en los diferentes arcos que minimizan el costo total y satisfacen las condiciones (restricciones) de flujo en los arcos y las cantidades de oferta y demanda en los nodos.

Primero presentaremos el modelo del flujo de red restringido y un equivalente en PL. Después la estructura de programación lineal y después algoritmo **simple** de redes restringidas.

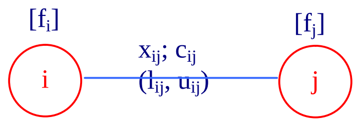
REPRESENTACIÓN DE LA RED

Sea G (N, A); N conjunto de nodos, A conjunto de arcos.

x_{ij}: La cantidad de flujo de i al nodo j ie.



u_{ij} (l_{ij}): Capacidad superior (inferior) del arco ij



c_{ij}: Costo del flujo por unidad del nodo i al nodo j

f_i: Flujo neto en el nodo i.

$[f_j]$: Asume un valor positivo si se trata de una oferta.

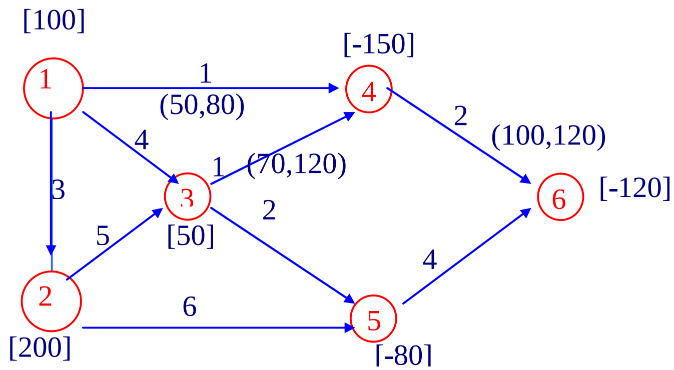
$[f_i]$: Asume un valor negativo si se trata de una demanda.

Ejemplo:

La empresa San Fernando proporciona maíz de tres almacenes a sus tres granjas, la cantidad de oferta en los almacenes son 100,200 en 50 toneladas. La empresa en su mayor parte usa trailer para transportar el alimento con excepción de tres rutas que una camiones la figura <u>adjunta asume las rutas disponibles entre los almacenes y las granjas</u>, los almacenes están representados por los nodos y ; y los grupos por y 1 2 3 4 5 6

Las rutas permiten el trasbordo entre los almacLa empresa San Fernando proporciona maíz de tres almacenes a sus tres granjas, la cantidad de oferta en los almacenes son 100,200 en 50 toneladas. La empresa en su mayor parte usa trailer para transportar el alimento con excepción de tres rutas que una camiones la figura <u>adjunta asume las rutas disponibles entre los almacenes y las granjas</u>, los almacenes están representados por los nodos 1 2 y 3 ; y los grupos por 4 5 y 6

Las rutas permiten el trasbordo entre los almacenes; los arcos (1,4) (3,4) y (4,6) son rutas de camiones. Estas rutas tienen capacidades mínimas y máximas por ejemplo la capacidad de la ruta (1,4) es de 50 y 80 toneladas, (3,4) es de 70 y 120, (4,6) es de 100 y 120. Todos las otras rutas utilizan trasbordo cuya capacidad máxima es ilimitada.



ESTRUCTURA DEL PROGRAMA LINEAL

Considerando las definiciones antes realizadas se tiene:

C_4

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} \sum c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{\substack{k \\ (j,k)\in A}} x_{jk} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = f_j; \quad j \in N \qquad (2)$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (3)$$

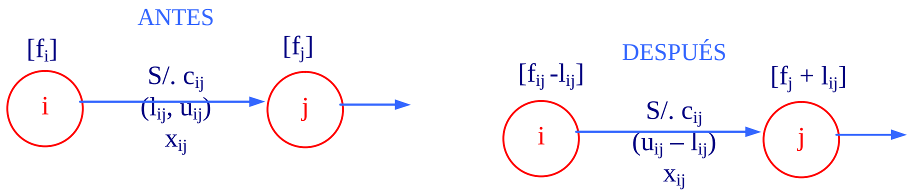
La ecuación (2) mide en el nodo j el flujo neto f_j en el nodo j ie.

$$\boxed{\text{(Flujo de salida del nodo j)} \quad \text{(Flujo de entrada al nodo j)} \quad \mathbf{f_j}}$$

Observaciones:

1. El nodo j actúa como un punto de origen si $f_j > 0$
2. El nodo j actúa como un punto de llegada si $f_j < 0$
3. Si hacemos: $x_{ij} = x_{ij} + l_{ij}$, eliminamos la cota inferior l_{ij} de las restricciones.
4. La nueva variable x_{ij} tiene como límite superior $u_{ij} - l_{ij}$.

5. El flujo neto en el nodo i se convierte en $[f_i] - l_{ij}$
6. El flujo neto en el nodo j se convierte en $[f_j] + l_{ij}$



Ejemplo:

Escribir el programa lineal para el ejemplo antes y después sustituir las cotas inferiores.

A) Las primeras restricciones del programa lineal relacionan el flujo de entrada y salida en cada nodo.

	x_{ij}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	
Minimice	c_{ij}	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
Nodo 1		1	1	1							= 100
Nodo 2		–1			1	1					= 200
Nodo 3			–1		–1		1	1			= 50
Nodo 4				–1			–1		1		= -150
Nodo 5						–1		–1		1	= -80
Nodo 6									–1	–1	= -120
Cota inf.		0	0	50	0	0	70	0	100	0	
Cota sup.		∞	∞	80	∞	∞	120	∞	120	∞	

OBSERVACIONES:

7.4.La disposición de los coeficientes en las restricciones asociada a x_{ij} tiene 1 en la linea i, y en la columna j tiene -1 el resto son todos ceros.

7.5.Los comentarios en 1 típica en los modelos de redes.

B) Cuando se hacen los cambios las variables con..........inferiores:

$$x_{14} = x^1_{14} + 50 \quad x_{34} = x^1_{34} + 70 \quad x_{46} = x^1_{46} + 100$$

	X_{12}	x_{13}	x^1_{14}	x_{23}	x_{25}	x^1_{34}	x_{35}	x^1_{46}	x_{56}	
Minimice	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
Nodo 1	1	1	1							= 50
Nodo 2	–1			1	1					= 200
Nodo 3		–1		–1		1	1	1		= -20
Nodo 4			–1			–1				= -130
Nodo 5					–1		–1		1	= -80
Nodo 6								–1	–1	= -20
Cotas super.	∞	∞	30	∞	∞	50	∞	20	∞	

$f_i - l_{ij}$
$f_i + l_{ij}$

La red procede ser modificado solo en el grafico los flujos, lo demás se mantiene.

Debemos destacar que la red correspondiente después de sustituir las cotas inferiores es la siguiente: