UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Modelos Matemáticos de Optimización

Begoña Vitoriano Villanueva
Universidad Pontificia Comillas

I. Investigación operativa y optimización

- ***Historia:***

  ANTES DE LA II GUERRA MUNDIAL

  Farkas, Minkowski,... (XIX); Markov (XIX), Erlang (20);

  Von Neumann (30)

  DURANTE LA II GUERRA MUNDIAL

  1935 → Radar, 1937 → Cooperación

  1938 → Rowe: Operational Research: Bawdsey RAF,... → British Army Operational Group

  DESPUES DE LA II GUERRA MUNDIAL

  Problemas Logísticos Dantzig (Rand) → Simplex (1947)

  Sociedades: Orsa, Tims (EEUU), España(1962), Euro(1975) (IFORS)

I. Investigación operativa y optimización

- *Investigación Operativa:*
  - ✓ Es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a los problemas complejos producidos en la dirección y gestión de grandes sistemas de hombres, máquinas,[...] La principal característica consiste en construir un modelo científico del sistema del cual se pueden predecir y comparar los resultados de las diversas estrategias, decisiones,...

    El objetivo es ayudar a los responsables a determinar su política y actuaciones en forma científica.

  - ✓ Tiene por objeto ayudar a decidir, mediante el método científico, el diseño que optimiza el funcionamiento de sistemas bajo condiciones que suelen implicar el uso de recursos escasos.

  - ✓ Kaufmann: Son las matemáticas de la organización

I. Investigación operativa y optimización

- *Optimización: Determinación de una alternativa de decisión con la propiedad de ser mejor que cualquier otra en algún sentido a precisar*
- *Elementos de un problema de optimización:*
  - ✓ Función objetivo: Medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar)
  - ✓ Variables: Representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo.
    - Variables independientes
    - Variables dependientes o de estado
  - ✓ Restricciones: Representan el conjunto de relaciones (ecuaciones e inecuaciones) que las variables están obligadas a cumplir
- *Resolver: Encontrar valor de las variables que optimiza la función objetivo y satisface todas las restricciones.*

I. Investigación operativa y optimización

❑ CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN:

✓ a) Clásicos (programación matemática)

PROGRAMACIÓN LINEAL (*LINEAR PROGRAMMING*) LP	PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA (*MIXED INTEGER PROGRAMMING*) MIP	PROGRAMACIÓN NO LINEAL (*NON LINEAR PROGRAMMING*) NLP	PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO (*multiobjective programming*)
$\min_x c^T x$ $Ax = b$ $x \geq 0$ $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$	$\min_x c^T x + d^T y$ $Ax + By = b$ $x, y \geq 0$ $x \in Z^n, y \in \mathbb{R}^l, c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^l$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times l}, b \in \mathbb{R}^m$	$\min_x f(x)$ $g(x) = 0$ $h(x) \leq 0$ $l \leq x \leq u$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\min_x (f_1(x), \dots, f_k(x))$ $Ax = b$ $x \geq 0$ $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

✓ b) Metaheurísticos (aproximación) (genéticos, recocido simulado, búsqueda heurística)

II. Modelos de optimización

- ***Modelo***:
  - ✓ Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja (por ejemplo, la evolución económica de un país), que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.(Diccionario de la lengua española. Real Academia Española.)
  - ✓ Representación precisa de una realidad
  - ✓ Herramienta de ayuda a la toma de decisiones
  - ✓ Puede involucrar equipo multidisciplinar
- ***Modelador***: especifica y desarrolla el modelo
- ***Experto***: conoce el problema real

II. Modelos de optimización

❑ *MODELADO :*

✓ *Ciencia*

- Análisis y detección de relaciones entre datos
- Suposiciones y aproximaciones a los problemas
- Algoritmos específicos de solución

✓ *Arte*

- Visión o interpretación de la realidad
- Estilo en modelo y documentación
- Elegancia y simplicidad en desarrollo
- Uso creativo de herramientas

II. Modelos de optimización

- *ETAPAS EN EL DESARROLLO DE UN MODELO :*

1. *Identificación del problema*
2. *Especificación matemática y formulación*
3. *Resolución*
4. *Verificación, validación y refinamiento*
5. *Interpretación y análisis de resultados*
6. *Uso extensivo*

II. Modelos de optimización

1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Recolección de información relevante

Definición del problema en términos vagos

Interpretación y traducción a términos precisos

Datos son vitales, suelen ser cuello de botella

Etapa fundamental para que decisiones sean útiles

2. ESPECIFICACIÓN MATEMÁTICA Y FORMULACIÓN

- ✓ *Definición de variables, ecuaciones, función objetivo, parámetros*
- ✓ *Análisis de tamaño y estructura del problema*
- ✓ *Identificación de tipo de problema (LP, MIP, NLP,...)*
- ✓ *Énfasis en precisión y belleza en la formulación*

Tipos de problemas LP según su tamaño

	Restricciones	Variables
• Caso ejemplo	100	100
• Tamaño medio	10000	10000
• Gran tamaño	100000	100000
• Muy gran tamaño	> 100000	> 100000

II. Modelos de optimización

3. RESOLUCIÓN

Algoritmo de obtención de solución óptima, satisfactoria,...

Diferentes métodos de solución

Diferentes implantaciones del algoritmo elegido

4. VERIFICACIÓN, VALIDACIÓN Y REFINAMIENTO

Eliminación de errores en codificación

Comprobación validez de simplificaciones adoptadas

Comprobación de adaptación a la realidad

Ampliación en el modelado por nuevas necesidades

II. Modelos de optimización

5. INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Análisis de sensibilidad en parámetros de entrada

Robustez de la solución óptima

Detección de soluciones cuasióptimas atractivas

6. USO EXTENSIVO

Etapa fundamental para el éxito de un modelo

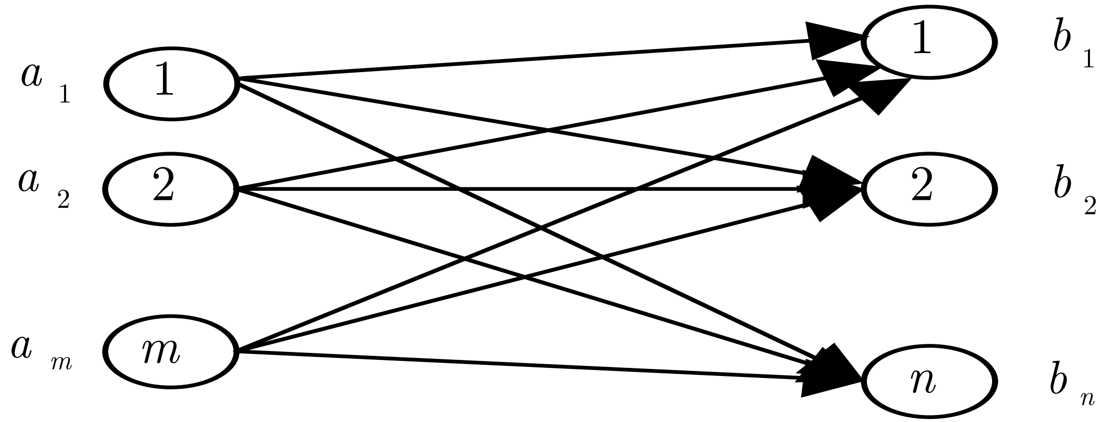
Documentación clara, precisa y completa

Manual especificación funcional, matemática e informática

Formación de posibles usuarios

❑ *PROBLEMA DE TRANSPORTE*

- ✓ Minimizar el coste total de transporte de un producto desde unos orígenes a unos destinos, satisfaciendo la demanda de cada destino sin superar la oferta disponible en cada origen.
- ✓ Se supone todos los orígenes conectados con todos los destinos



- ✓ a_i oferta en el origen i , b_j demanda en el destino j
- ✓ c_{ij} coste unitario de transporte desde el origen i al destino j

¿Cómo satisfacer la demanda sin superar la oferta con mínimo coste?

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *PROBLEMA DE TRANSPORTE (Solución):*

x_{ij} :cantidad transportada de origen i a destino j

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j$$

Matriz TU (sol. lineal es entera):

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\
\hline
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
m & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
2 & & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
n & & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1
\end{array}$$

III. Formulación de problemas de optimización

PROBLEMA DE TRANSBORDO:

- ✓ Llevar un producto desde orígenes a destinos con puntos intermedios en una red de N nodos con mínimo coste
- ✓ Cada nodo i b_i unidades ($\sum_i b_i = 0$):
  - $b_i > 0$ nodo origen
  - $b_i < 0$ nodo destino
  - $b_i = 0$ nodo transbordo (ni genera ni consume)
- ✓ c_{ij} coste unitario de transporte de nodo i a nodo j

Solución:

$$x_{ij} : \text{ cantidad a transportar de nodo } i \text{ a nodo } j$$

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *PROBLEMA DE ASIGNACIÓN*

- ✓ Asignar la realización de N tareas a N personas (máquinas, etc.).
- ✓ c_{ij} coste de realizar la tarea i por la persona j
- ✓ *Objetivo: Minimizar el coste total de realizar las tareas sujeto a*
  - *cada tarea debe ser hecha por una sola persona*
  - *cada persona debe realizar una única tarea.*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la tarea } i \text{ a la persona } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j$$

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *PROBLEMA DE LA MOCHILA (KNAPSACK):*

✓ Maximizar el valor total de la elección de un conjunto de proyectos.

- Sin sobrepasar el presupuesto disponible *b*
- c_j coste de cada proyecto
- v_j valor de cada proyecto

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza el proyecto } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

III. Formulación de problemas de optimización

- *PROBLEMA DE RECUBRIMIENTO (set covering):*
  - ✓ Existen m características y n combinaciones (subconjuntos) de características. La elección de una combinación implica realizar todas sus características.
  - ✓ *Seleccionar combinaciones de modo que se cubra (posea) cada característica al menos una vez con el mínimo coste*
  - ✓ Datos:
    - Matriz de pertenencia:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si caracteristica } i \text{ incluida en combinacion } j \\ 0 & \text{si no esta incluida} \end{cases}$$

    - c_j coste de la combinación *j*

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la combinación } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

III. Formulación de problemas de optimización

- Ejemplo: *Asignación de tripulaciones*
  - ✓ Una compañía aérea asignar tripulaciones para cubrir sus vuelos
  - ✓ 12 secuencias factibles de vuelos para una tripulación
  - ✓ Se permite más de una tripulación en un vuelo, donde la/s tripulación/es extra viajan como pasajeros, (por convenio laboral la tripulación extra cobra como si estuviera trabajando)
  - ✓ El coste de asignación de una tripulación a cada secuencia de vuelos se da en la última fila en unidades apropiadas
  - ✓ Objetivo: minimizar coste total de asignación para cubrir todos los vuelos
  - ✓ Resolver el mismo problema si no se permite más de una tripulación por vuelo

III. Formulación de problemas de optimización

	Secuencias factibles											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SF – LA	1			1			1			1		
SF – Denver		1			1			1			1	
SF – Seattle			1			1			1			1
LA – Chicago				2			2		3	2		3
LA – SF	2					3				5	5	
Chicago – Denver				3	3				4			
Chicago – Seattle							3	3		3	3	4
Denver – SF		2		4	4				5			
Denver – Chicago					2			2			2	
Seattle – SF			2				4	4				5
Seattle – LA						2			2	4	4	2
Coste	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

Números: orden del vuelo en la secuencia

III. Formulación de problemas de optimización

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la secuencia } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1$$

$$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1$$

$$\vdots$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

Soluciones optimas (coste 18): $x_3 = x_4 = x_{11} = 1$ resto 0

$x_1 = x_5 = x_{12} = 1$ resto 0

Si no se permite repetición las desigualdades tendrían que ser igualdades

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *PROBLEMA DE EMPAQUETADO (set packing):*

- ✓ *m* proyectos agrupados en *n* lotes
- ✓ Elegir un lote implica realizar todos los proyectos incluidos en él
- ✓ c_j beneficio de elegir el lote *j*
- ✓ Matriz de pertenencia del proyecto *i* al lote *j*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ pertenece a } j \\ 0 & \text{si no pertenece} \end{cases}$$

- ✓ Maximizar el beneficio total de manera que cada proyecto no puede ser elegido más de una vez

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el lote } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

PROBLEMA DE LA PARTICIÓN:

- ✓ Similar a los problemas anteriores excepto en que exactamente una característica (proyecto) del conjunto de combinaciones (lotes) que la contienen debe ser elegida.

$$\min_{x_j} \text{ o } \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

PROBLEMA DEL VIAJANTE (TSP):

- ✓ *Hacer un recorrido que pase por N ciudades sin repetir ninguna y volviendo a la ciudad de partida de manera que la distancia (coste) total sea mínima.*
- ✓ Uno de los más importantes en programación matemática
- ✓ Muchas formulaciones conocidas para él, ver Williams (1999)
- ✓ c_{ij} *distancia (coste) entre ciudad i y ciudad j*

✓ *Formulación 1 (clásica):*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_{ij}} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i,j \in U} x_{ij} \le \mathrm{Card}(U) - 1 \quad \forall U \subset \{1, \ldots, n\} \quad 2 \le \mathrm{Card}(U) \le n - 2$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

III. Formulación de problemas de optimización

✓ *Formulación 2:*

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \text{ en el tramo } k \text{ de recorrido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_{ijk}} \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk}$$

$$\sum_{j,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{j,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall k$$

$$\sum_{i} x_{ijk} = \sum_{i} x_{jik+1} \quad \forall j,k$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}$$

III. Formulación de problemas de optimización

- Ejemplo: *secuenciación de trabajos en una máquina*
  - ✓ Una máquina y 5 trabajos que hay que realizar en ella.
  - ✓ Tiempos ejecución:

TR1	TR2	TR3	TR4	TR5
15	13	12	14	16

  - ✓ Tiempos de ajuste (set-up) pasar de ejecutar trabajo *i* a trabajo *j*

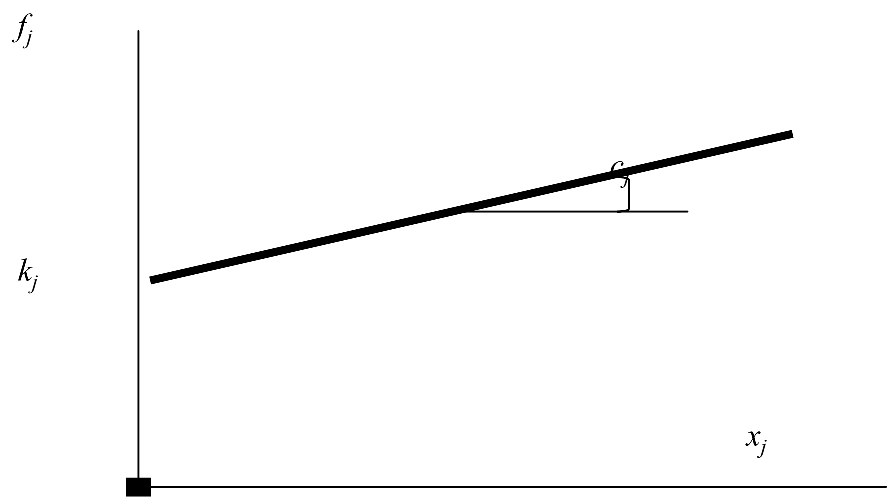
	TR1	TR2	TR3	TR4	TR5
TR1		2	5	1	6
TR2	3		4	2	5
TR3	4	2		3	4
TR4	5	3	6		5
TR5	4	4	4	3	

  - ✓ Plantear el problema para determinar cuál es el menor tiempo posible para completar los 5 trabajos y cómo hacerlo. Es un ciclo de trabajo cerrado, se repite y vuelve a comenzar.
  - ✓ ¿Cómo se haría para un ciclo de trabajo abierto?

❑ *PROBLEMA DE COSTE FIJO:*

✓ Coste con un término fijo si la variable toma un valor estrictamente positivo

$$f_j(x_j) = \begin{cases} 0 & x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j & x_j > 0 \end{cases}$$



✓ *Variable auxiliar binaria:*

$$y_j = \begin{cases} 1 & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

$$\min_{x_j, y_j} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(k_j y_j + c_j x_j \right)$$

$$x_j \leq M y_j$$

III. Formulación de problemas de optimización

- Ejemplo: *Asignación de grupos térmicos*
  - ✓ Grupos térmicos a acoplar en cada hora del día (semana) tal que:
    - Minimizar costes de generación: costes combustible, arranque, parada
    - Se suministre la demanda en cada hora
    - Se mantenga un cierto nivel de reserva rodante
    - Se respeten parámetros (mínimos técnicos, rampas subida y bajada)
- Datos:
  - D_h demanda térmica en la hora *h* [MW]
  - R nivel de reserva rodante con respecto a la demanda [p.u.]
  - a_t término lineal coste combustible del grupo térmico *t* [€ /MWh]
  - b_t término fijo del coste de combustible del grupo térmico *t* [€ /h]
  - ca_t coste de arranque del grupo térmico *t* [€]
  - cp_t coste de parada del grupo térmico *t* [€]
  - $\overline{P}_t$ potencia máxima del grupo térmico *t* [MW]
  - $\underline{P}_t$ potencia mínima del grupo térmico *t* [MW]
  - rs_t rampa de subida del grupo térmico *t* [MW/h]
  - rb_t rampa de bajada del grupo térmico *t* [MW/h]

III. Formulación de problemas de optimización

Variables

P_{ht} potencia producida por el grupo térmico *t* en la hora *h* [MW]

A_{ht} acoplamiento del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

AR_{ht} arranque del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

PR_{ht} parada del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

$$\min \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} \left(a_t P_{ht} + b_t A_{ht} + ca_t AR_{ht} + cp_t PR_{ht} \right)$$

s.a.

$\sum_{t=1}^{T} P_{ht} = D_h$ $\quad \forall h \quad$ Satisfacer demanda

$\sum_{t=1}^{T} (\overline{P}_t A_{ht} - P_{ht}) = RD_h$ $\quad \forall h \quad$ Nivel de reserva rodante

$\underline{P}_t A_{ht} \le P_{ht} \le A_{ht} \overline{P}_t$ $\quad \forall h, t \quad$ Mínimos, máximos técnicos de cada grupo

$A_{ht} - A_{h-1t} = AR_{ht} - PR_{ht}$ $\quad \forall h, t \quad$ Acoplamientos, arranques y paradas

$P_{ht} - P_{h-1t} \le rs_t$ $\quad \forall h, t \quad$ Rampa de subida

$P_{h-1t} - P_{ht} \le rb_t$ $\quad \forall h, t \quad$ Rampa de bajada

$P_{ht} \ge 0 \qquad A_{ht}, AR_{ht}, PR_{ht} \in \{0,1\}$ $\quad$ Carácter de variables

❑ *MODELADO DE RESTRICCIONES ESPECIALES:*

- ✓ *DISYUNCIÓN:* de 2 restricciones al menos una debe darse.Debe cumplirse una, no necesariamente las dos: $f(x) \le 0$ ó $g(x) \le 0$
- ✓ Modelo lineal:
  - Variable binaria $\rightarrow$ $\delta = \begin{cases} 1 & \text{obliga a } g(x) \le 0 \text{ y relaja la otra} \\ 0 & \text{obliga a } f(x) \le 0 \text{ y relaja la otra} \end{cases}$
  - Restricciones: $\left.\begin{aligned} f(x) &\le M_1 \delta \\ g(x) &\le M_2 (1-\delta) \end{aligned}\right\} \delta \in \{0,1\}$

$3x_1 + 2x_2 - 18 \le 0 \;\; o \;\; x_1 + 4x_2 - 16 \le 0$ equivale $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 18 \le M_1 y \\ x_1 + 4x_2 - 16 \le M_2 (1-y) \end{cases} y \in \{0,1\}$

- ✓ *IMPLICACIÓN:* si se da una condición obligatoriamente ha de darse la otra $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) \le 0$
  - Equivale a disyunción ($(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (no A \text{ o } B)$): $f(x) \le 0 \;\; o \;\; g(x) \le 0$

III. Formulación de problemas de optimización

- *MODELADO DE RESTRICCIONES ESPECIALES:*
  - ✓ *CUMPLIR K DE N ECUACIONES:* de N ecuaciones se han de cumplir al menos K, siendo K<N.

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x_1,\dots,x_n) \le 0 & M_1 \\
f_2(x_1,\dots,x_n) \le 0 & M_2 \\
\vdots & \\
f_N(x_1,\dots,x_n) \le 0 & M_N
\end{array}
\qquad
\begin{cases}
f_1(x_1,\dots,x_n) \le M_1 y_1 \\
f_2(x_1,\dots,x_n) \le M_2 y_2 \\
\vdots \\
f_N(x_1,\dots,x_n) \le M_N y_N
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{N} y_i = N - k \\
y_i \in \{0,1\}
\end{array}
$$

  - ✓ *SELECCIONAR ENTRE N VALORES:* Una ecuación con múltiples posibles cotas (RHS).

$$
f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}
f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i \\
\sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \qquad y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,\dots,N
\end{array}
$$

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *MODELADO DE RESTRICCIONES LÓGICAS:*

$P \rightarrow Q$	$No\ P\ o\ Q$
$P \rightarrow (Q\ y\ R)$	$(P \rightarrow Q)\ y\ (P \rightarrow R)$
$P \rightarrow (Q\ o\ R)$	$(P \rightarrow Q)\ o\ (P \rightarrow R)$
$(P\ y\ Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow R)\ o\ (Q \rightarrow R)$
$(P\ o\ Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow R)\ y\ (Q \rightarrow R)$
no (P o Q)	no P y no Q
no (P y Q)	no P o no Q

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *MODELADO EN PROGRAMACIÓN NO LINEAL:*

✓ *Problemas de producción con elasticidad en los precios y/o costes*

- Precios elásticos: cantidad se puede vender relación inversa precio
- *p(x)* precio unitario de venta para poder vender *x* unidades. Decreciente y no inferior al coste unitario de producción, *c.* (Típico, constante a tramos) Afecta a la función objetivo.
- Margen de contribución de la empresa: $$P(x) = (p(x) - c)x$$
- Costes producción: decrecientes (*curva de aprendizaje*) o crecientes (tiempo extra). Afecta a f. objetivo y restricciones (presupuesto)

✓ *Problema de transporte con descuentos por volumen*

- Descuentos por cantidad: Función coste unitaria escalonada, no creciente
- Coste de embarcar x unidades: poligonal, continua, con pendiente el coste unitario en cada tramo. Agregar: $$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$$

III. Formulación de problemas de optimización

❑ *MODELADO EN PROGRAMACIÓN NO LINEAL:*

✓ *Selección de una cartera de inversiones*

- Rendimiento esperado y riesgo asociado a la inversión.
- Acciones tipo j: μ_j rendimiento esperado
  σ_{jj} varianza del rendimiento
  σ_{ij} covarianza del rendimiento de las tipo *i* y las *j*
  p_j precio unitario por acción
- b Presupuesto disponible
- X_j cantidad de acciones de tipo *j* a incluir en la cartera
- Planteamiento típico:

$$\max\ f(X) = R(X) - \beta V(X) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq B$$

(β factor aversión al riesgo)

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

IV. Codificación de problemas de optimización

❑ *LENGUAJES DE MODELADO*

- ✓ *Lenguajes de programación de propósito general (C, FORTRAN, Visual Basic, C++)*
- ✓ *Lenguajes o entornos de cálculo numérico o simbólico (hojas de cálculo, Matlab, Mathematica)*
- ✓ *Programas para problemas pequeños (QSB, ORSTAT, LPSolve,...)*
- ✓ *Lenguajes algebraicos de modelado (GAMS, AMPL, XPRESS-MP, OPL, ECLIPSE, ILOG-Concert)*

❑ *LENGUAJES ALGEBRAICOS DE MODELADO*

- ✓ *Lenguajes de alto nivel diseñados para el desarrollo e implantación de modelos de optimización de forma directa*

IV. Codificación de problemas de optimización

❑ *VENTAJAS LENGUAJES ALGEBRAICOS:*

- ✓ Formulación compacta modelos grandes y complejos
- ✓ Facilitan desarrollo de prototipos
- ✓ Mejoran productividad de modeladores
- ✓ Estructuran buenos hábitos de modelado
- ✓ Separan datos de estructura y de optimizadores
- ✓ Formulación independiente del tamaño
- ✓ Modelo independiente de optimizadores
- ✓ Facilitan reformulación continua
- ✓ Documentación simultánea al modelo
- ✓ Permiten implantación de algoritmos avanzados
- ✓ Portabilidad entre plataformas y sistemas operativos

IV. Codificación de problemas de optimización

❑ *DESVENTAJAS LENGUAJES ALGEBRAICOS:*

- ✓ No son adecuados para usos esporádicos con problemas de pequeño tamaño
- ✓ No son adecuados para resolución directa problemas de tamaño gigantesco
- ✓ Puede ser menos eficiente en tiempo y memoria requeridos

IV. Codificación de problemas de optimización

- *MODELADO EN GAMS*
  - Estructura general de un modelo de optimización en GAMS
    - Declaración de sets y parámetros
    - Variables
    - Ecuaciones
    - Modelo
    - Inclusión y manipulación de datos de entrada
    - Acotación e inicialización de variables
    - Resolución del problema
    - Lectura y presentación de resultados
- *TIEMPO DE EJECUCIÓN DE MODELOS EN GAMS*
  - tiempo de creación
    - formulación del problema específico
  - tiempo de interfaz
    - comunicación entre lenguaje GAMS y optimizador
  - tiempo de optimización
    - resolución del problema por el optimizador

IV. Codificación de problemas de optimización

❑ *EJEMPLO DE TRANSPORTE:*

- ✓ Fábricas de envasado → *i*.
- ✓ Mercados de consumo → *j*.
- ✓ a_i: capacidad máxima de producción de cajas en *i*.
- ✓ b_j: cantidad de cajas demandadas en mercado *j*.
- ✓ c_{ij}: coste de transporte de cada caja de planta *i* a mercado *j*.

Satisfacer la demanda de cada mercado a mínimo coste.

- ✓ Variables:

  x_{ij}: cantidad de cajas enviadas de planta i a mercado j

- ✓ Restricciones:
  - *Límite de capacidad de producción de cada fábrica* $\sum_j x_{ij} \le a_i \quad \forall i$
  - *Satisfacción de la demanda de cada mercado* $\sum_i x_{ij} \ge b_j \quad \forall j$
  - Función objetivo: $\min_{x_{ij}} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$