Modelos de programación lineal y entera

Pedro Sánchez Martín

Contenidos

- Problema de:

Transporte

Transbordo

Asignación

Mochila (knapsack)

Recubrimiento (set covering)

Empaquetado (set packing)

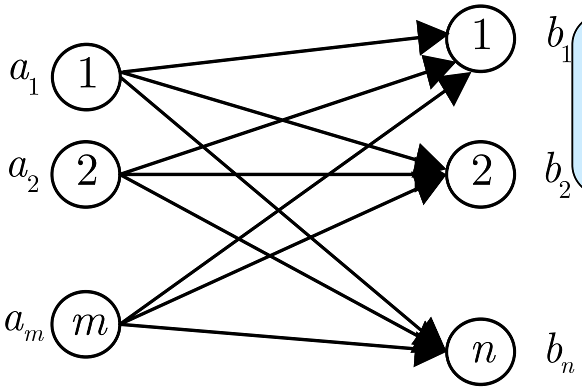
Partición (set partitioning)

Viajante (TSP)

Coste fijo

Problema del transporte (i)

a_i
Oferta en los orígenes



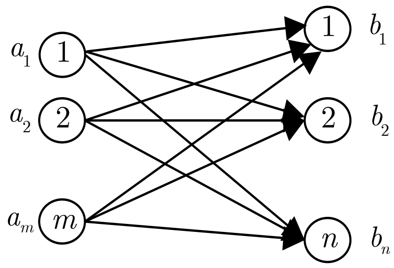
b_j
Demanda en los destinos

c_{ij} Coste unitario de transporte desde i a j

Función objetivo: Minimizar el coste total de transporte desde unos orígenes a unos destinos

Problema del transporte (ii)

Variables: Cantidades de producto transportadas entre los orígenes y destinos



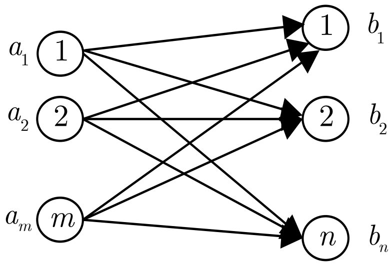
Todos los orígenes están conectados con todos los destinos

Restricciones:
- Cantidad disponible de producto en cada origen i (m restricciones)
- Demanda de cada destino j (n restricciones)

Problema del transporte (iii)

Formulación

$$
\begin{cases}
\min\limits_{x_{ij}} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\
x_{ij} \geq 0
\end{cases}
$$

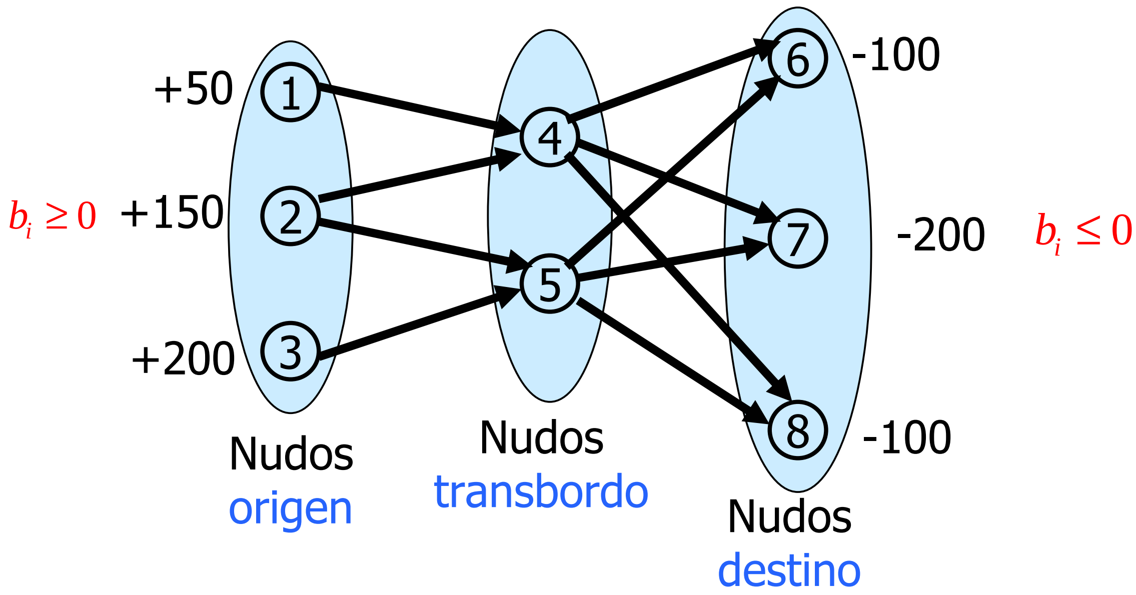


$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j}$$

- Esta formulación implica que la oferta es <u>igual</u> a la demanda
- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ se añade un <u>sumidero</u> universal con coste nulo
- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ se añade una <u>fuente</u> universal con coste elevado
- Por su estructura de coeficientes se resuelve como un problema **<u>lineal</u>**

Problema del transbordo (i)

Consiste en determinar las cantidades óptimas a transportar desde sus orígenes a destinos pasando por puntos de transbordo intermedios



Problema del transbordo (ii)

Se minimizan los costes de transporte

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Todo lo que sale del nudo i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Todo lo que se produce en el nudo i

Todo lo que entra al nudo i

$$x_{ij} \geq 0$$

Problema del transbordo (iii)

Extensiones del modelo con excesos y defectos de producto

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (e_i + d_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i - e_i + d_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

p_i : penalización por exceso y por defecto

e_i : variable por exceso de producto en origen i

d_i : variable por defecto de producto en destino i

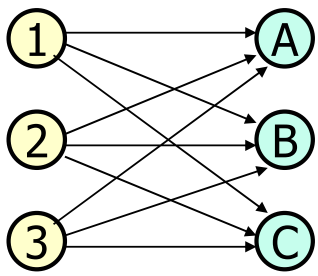
Problema de asignación (i)

- Asignar *n* tareas a *n* recursos (personas, máquinas,...)
- Es un caso particular del problema de transporte
- Es un problema con variables binarias de asignación
- Se resuelve como un problema de programación lineal

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \textit{si se asigna la tarea } i \textit{ al recurso } j \\ 0 & \textit{si } \underline{\textit{no}} \textit{ se asigna la tarea } i \textit{ al recurso } j \end{cases}$$

- Se denomina c_{ij} al coste de asignar la tarea i al recurso j

Tareas



Recursos

Problema de asignación (ii)

- Formulación matemática:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Se minimiza el coste de asignación

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$$

Cada tarea ha de ser realizada

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

Cada recurso es utilizado una sola vez

$$x_{ij} \geq 0$$

Problema de la mochila

- Se trata de maximizar el valor total de la elección de un conjunto de *n* proyectos sin sobrepasar el presupuesto *b* disponible

- v_j : valor de cada proyecto j
- c_j : coste de cada proyecto j

Variables de decisión: $x_j \begin{cases} 1 & \text{si se elije el proyecto } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

Formulación matemática

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$ → Maximizar el valor total

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le b$$ → No sobrepasar ppto

$$x_j \in \{0,1\}$$ → Variables binarias

Problema del recubrimiento (set covering) (i)

- Existen *m* características y *n* combinaciones de características
- Una combinación elegida implica realizar todas las características de dicha combinación
- Datos:

  c_j : coste de elegir la combinación j

  a_{ij} : elementos de la matriz de pertenencia

$$a_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ pertenece a } j \\ 0 & \text{si } i \text{ \underline{no} pertenece a } j \end{cases}$$

- Variables:

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{si se elige la combinación } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Problema del recubrimiento (set covering) (ii)

Formulación matemática:

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Minimizar el coste de asignación

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \ldots, m$$

Todas las características seleccionadas

$$x_j \in \{0,1\}$$

Variables binarias

Problema del recubrimiento (set covering) (iii)

Ejemplo:

Una compañía aérea quiere cubrir todos sus vuelos asignando tres tripulaciones con base en San Francisco a las 12 secuencias de vuelos que se indican en la siguiente tabla

	Secuencias factibles											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SF – LA	1			1			1			1		
SF – Denver		1			1			1			1	
SF – Seattle			1			1			1			1
LA – Chicago				2			2		3	2		3
LA – SF	2					3				5	5	
Chicago – Denver				3	3				4			
Chicago – Seattle							3	3		3	3	4
Denver – SF		2		4	4				5			
Denver – Chicago					2			2			2	
Seattle – SF			2				4	4				5
Seattle – LA						2			2	4	4	2
Coste (Mpta)	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

Coste

Esta asignación ha de realizarse minimizando el coste

Problema del recubrimiento (set covering) (iv)

Ejemplo (Cont.):

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1$$

$$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3$$

Soluciones óptimas: $\begin{cases} x_3 = x_4 = x_{11} = 1 \\ x_1 = x_5 = x_{12} = 1 \end{cases}$ Coste: 18 k€

Problema del empaquetado (i)

- Se tienen que realizar *m* proyectos divididos en *n* paquetes
- Maximizar el beneficio total de manera que cada proyecto *i* no sea elegido más de una vez
- Datos:

  c_j: beneficio de elegir el paquete *j*

  a_{ij} : matriz de pertenencia del proyecto *i* a cada paquete *j*

- Variables:

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{si se elige el paquete } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Problema del empaquetado (ii)

Formulación matemática:

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \text{Maximizar el beneficio total}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1, \ldots, m \longrightarrow \text{No hacer dos veces un mismo proyecto}$$

$$x_j \in \{0,1\} \longrightarrow \text{Variables binarias}$$

Problema de partición

Es igual que el problema del empaquetado salvo que todas las características o proyectos deben ser elegidas

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \text{Maximizar el beneficio total}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad i = 1, \ldots, m \longrightarrow \text{Hacer todos los proyectos}$$

$$x_j \in \{0,1\} \longrightarrow \text{Variables binarias}$$

Problema del viajante (TSP) (i)

Consiste en hacer un recorrido que pase por *n* ciudades sin repetir ninguna y volver a la ciudad de partida, haciendo que la distancia (coste) sea mínima

FORMULACIÓN 1

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$ → Minimizar la distancia total

$$\sum_{i} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$ → Se llega a todas las ciudades

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$ → Se sale de todas las ciudades

$$\sum_{i,j \in U} x_{ij} \leq \mathrm{Card}(U) - 1 \quad \forall U \subset \{1,\ldots,n\} \;\; / \;\; 2 \leq \mathrm{Card}(U) \leq n-2$$ → Evitar recorridos de orden inferior

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$ → Variables binarias de trayecto entre i y j

Problema del viajante (TSP) (ii)

FORMULACIÓN 2

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \text{ en el tramo } k \text{ de recorrido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_{ijk}} \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk}$$ → Minimizar la distancia total

$$\sum_{j,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall i$$ → Se sale de todas las ciudades

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall j$$ → Se llega a todas las ciudades

$$\sum_{i,j} x_{ijk} = 1 \quad \forall k$$ → Se completan todos los tramos

$$\sum_{i} x_{ijk} = \sum_{r} x_{jrk+1} \quad \forall j,k$$ → Realización tramos consecutivos

$$x_{ijk} \in \{0,1\}$$ → Variables binarias

Problema de coste fijo

Una variable x_j tiene un coste con un término fijo k_j si dicha variable toma valor estrictamente positivo y un término variable c_j

$$f_j(x_j) = \begin{cases} 0 & x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j & x_j > 0 \end{cases}$$

Este tipo de coste se modela con una variable binaria auxiliar

$$y_j \in \{0,1\} \qquad x_j \le M \cdot y_j \qquad y_j = \begin{cases} 1 & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

Función objetivo: $\min_{x_j, y_j} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(k_j y_j + c_j x_j \right)$