8. Transformadas de Fourier Discretas

8.1 Introducción

En numerosos problemas de ingeniería, como por ejemplo al estudiar vibraciones mecánicas, se tienen funciones periódicas. Una función $f(t)$ es periódica, con período T, si $f(t+T) = f(t)$ para todo t. En tal caso $f(t)$ puede ser expresada en series de Fourier[1]:

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos(\Omega_j t) + b_j \operatorname{sen}(\Omega_j t) \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \, e^{i\Omega_j t} \tag{8.1}$$

donde $\Omega_j = j(2\pi / T)$ y T es el período. Puede demostrarse que:

$$c_0 = a_0, \qquad c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - i b_k), \qquad c_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + i b_k) \tag{8.2}$$

siendo $i = \sqrt{-1}$.

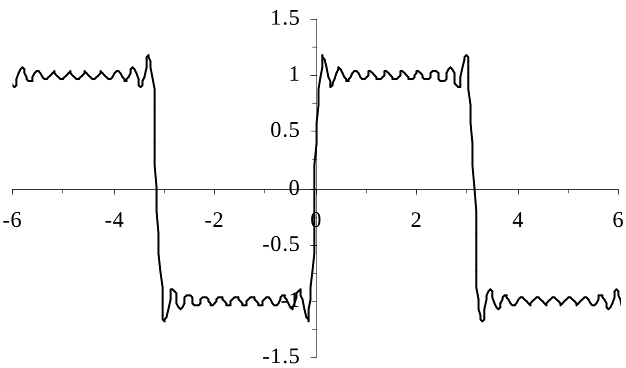
Por ejemplo, para la onda rectangular con período 2π:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Se obtiene:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots \right)$$

En la figura se muestra la aproximación obtenida considerando 10 términos de la serie:



Si f y su primera derivada son continuas, la serie es convergente para todo t. Cuanto más regular sea la función, mayor es la velocidad de convergencia. Si f y f' tienen un número finito de discontinuidades finitas en cada período, la serie produce el valor medio en cada uno de tales puntos.

En los procedimientos numéricos las funciones se expresan por colecciones de valores $f_n = f(t_n)$ que habitualmente corresponden a abscisas uniformemente espaciadas: $t_n = n\,\Delta t$. Si la función es periódica podría definirse por una colección de N valores

---

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), ingeniero francés. En 1807 presentó a la Academia Francesa su teorema relativo a las series de F., que publicó posteriormente como parte de su *Teoría Analítica del Calor*.

numéricos $f_0, f_1, f_2, \ldots f_{N-1}$ siendo el período $T = N\,\Delta t$. En lo que sigue, se denomina a esto el caso discreto. Análogamente a la (8.1):

$$f_n = f(t_n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\, e^{i\Omega_j t_n} \tag{8.3}$$

Nótese que $e^{i\Omega_{j+N} t_n} = e^{2\pi i\left(\frac{j+N}{N\,\Delta t}\right) n\,\Delta t} = \left(e^{2\pi i}\right)^n e^{2\pi i\left(\frac{j}{N\,\Delta t}\right) n\,\Delta t} = e^{i\Omega_j t_n}$, por lo que factorizando se puede escribir:

$$f_n = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{c}_j\, e^{i\Omega_j t_n} \tag{8.4}$$

En la sección siguiente se revisan expresiones que permiten determinar los coeficientes de tales series. Para simplificar la presentación se ha escrito c_j en lugar de $\hat{c}_j$.

8.2 Ortogonalidad de las Funciones Armónicas

Caso continuo

Supóngase que se tienen dos funciones periódicas $f(t) = f(t+T)$ y $g(t) = g(t+T)$. En lo que sigue se hace referencia al producto interno de tales funciones periódicas:

$$(f, g) = \int_0^T f(t)\,\bar{g}(t)\,dt \tag{8.5}$$

donde $\bar{g}(t)$ indica la conjugada de $g(t)$.

Considérense ahora las funciones periódicas: $\varphi_j(t) = e^{i\,\Omega_j t}$ para $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, siendo $\Omega_j = j\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)$ e $i = \sqrt{-1}$. Nótese que $\varphi(t+T) = \varphi(t)$. Además: $\bar{\varphi}_j(t) = e^{-i\,\Omega_j t}$

Puede observarse que:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} T & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \tag{8.6}$$

como se demuestra a continuación. Para $j = k$:

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \int_0^T e^{i\Omega_j t}\, e^{-i\Omega_j t}\, dt = \int_0^T dt = T$$

Para $j \neq k$:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^T e^{i\Omega_j t}\, e^{-i\Omega_k t}\, dt = \int_0^T e^{2\pi i\,(j-k)\,t/T}\, dt = \frac{e^{2\pi i\,(j-k)} - e^0}{2\pi i\,(j-k)/T} = 0$$

Caso discreto

En este caso el producto interno de dos funciones con igual período, T, cada una expresada por una colección de N valores numéricos, se define como:

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n\, \bar{g}_n$$

Considerando nuevamente las funciones $\varphi_j(t) = e^{i\,\omega_j t}$ se tiene: $\varphi_j(t_n) = e^{i\,\Omega_j t_n} = e^{\frac{2\pi i}{N} jn}$ y entonces:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jn} \, e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \left(\frac{j-k}{N}\right) n}$$

Si $j-k$ es un múltiplo de N se tiene que $\dfrac{j-k}{N}$ es un entero y por lo tanto:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N$$

Por otro lado, si $j-k$ no es un múltiplo de N puede escribirse:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{n=0}^{N-1} q^n$$

donde $q = e^{2\pi i \left(\frac{j-k}{N}\right)}$. Esta es la suma de N términos de una progresión geométrica, con valor inicial 1 y razón q, que resulta:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \frac{q^N - 1}{q-1} = \frac{1-1}{q-1} = 0$$

Excepto para el caso antes mencionado, en que $j-k$ es un múltiplo de N, para el que se tiene $q = 1$. Resumiendo, para el caso discreto:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} N & \text{si } j-k \text{ es múltiplo de } N \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \tag{8.7}$$

8.3 *Coeficientes de Fourier*

Si $f(t)$ es periódica:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \, e^{\left(\frac{2\pi i}{T}\right) jt} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \, \varphi_j(t)$$

O en el caso discreto $f_n = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \, e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right) jn} = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \, \varphi_j(t_n)$

Los coeficientes c_j se denominan coeficientes de Fourier. Estos pueden determinarse con el producto interno:

$$(f, \varphi_k) = \sum_j c_j \, (\varphi_j, \varphi_k)$$

Siendo $(\varphi_j, \varphi_k) = 0$ para $j \neq k$ se obtiene $(f, \varphi_k) = c_k \, (\varphi_k, \varphi_k)$ y por lo tanto (después de cambiar k por j):

$$c_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, e^{-\left(\frac{2\pi i}{T}\right) jt} \, dt \quad \text{en el caso continuo} \tag{8.8}$$

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, e^{-\left(\frac{2\pi i}{N}\right) jn} \quad \text{en el caso discreto} \tag{8.9}$$

Cuando la función $f(t)$ es real, los coeficientes a_j, b_j de la expresión (8.1) son también reales. Los c_j son en general números complejos, pero si $f(t)$ es real tienen simetría conjugada, es decir: $c_{-k} = \bar{c}_k$, lo que puede observarse fácilmente en (8.2).

Las funciones de varias variables se tratan en forma análoga, considerando una variable a la vez. Supóngase que se conocen los valores de la función periódica (en ambas direcciones) $f(x_p, y_q)$ que corresponden a abscisas $x_p = p\,\Delta x$ y ordenadas $y_q = q\,\Delta y$ siendo $p = 0,1,2,\ldots M-1$ y $q = 0,1,2,\ldots N-1$:

$$f_{pq} = f(x_p, y_q) = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_{jk}\; e^{2\pi i\left(\frac{kq}{N}\right)} \right) e^{2\pi i\left(\frac{jp}{M}\right)} \qquad (8.10)$$

$$c_{jk} = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} f_{pq}\; e^{-2\pi i\left(\frac{kq}{N}\right)} \right) e^{-2\pi i\left(\frac{jp}{M}\right)} \qquad (8.11)$$

8.3 Transformadas de Fourier

Supóngase una función $f(t)$ no periódica, definida para $-\infty < t < \infty$ y tal que tiende a cero cuando t tiende a más infinito o a menos infinito. En tal caso, puede obtenerse el límite de (8.8) para $T \to \infty$:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\; dt \qquad (8.12)$$

La función $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$. Análogamente, el límite de (8.9) para $T \to \infty$ resulta:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, e^{i\Omega t}\; d\Omega \qquad (8.13)$$

que se denomina transformada inversa. El factor $1/(2\pi)$ podría indistintamente tenerse en (8.12) o en (8.13).

La tabla siguiente indica algunas propiedades de simetría de las transformadas de Fourier:

Función	Transformada de Fourier
$f(t)$ real	$F(-\Omega) = \bar{F}(\Omega)$
$f(t)$ imaginaria	$F(-\Omega) = -\bar{F}(\Omega)$
$f(t)$ simétrica	$F(-\Omega) = F(\Omega)$
$f(t)$ antisimétrica	$F(-\Omega) = -F(\Omega)$

Si $f(t)$ es simultáneamente real y simétrica $F(\Omega)$ es también real y simétrica; si $f(t)$ es imaginaria y antisimétrica $F(\Omega)$ es también antisimétrica pero real.

Puede también demostrarse que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\Omega) \right|^2\; d\Omega$$

Esto se conoce como el teorema de Parseval, que es de utilidad en diversas aplicaciones.

Si $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces la transformada de Fourier de $\dot{f}(t)$ resulta $i\Omega\, F(\Omega)$. Esto se verifica fácilmente haciendo una integración por partes. En consecuencia, se concluye que la transformada de la derivada m-ésima es $(i\Omega)^m\, F(\Omega)$.

Si se tiene la ecuación diferencial lineal:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + ku = f(t) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{u} + 2\beta\omega\dot{u} + \omega^2 u = f(t)/m$$

en la que m, c, k son constantes, se puede multiplicar por $e^{-i\Omega t}$ e integrar entre $-\infty$ y $+\infty$, para obtener:

$$m\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt + c\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt + k\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

Llamando $F(\Omega)$ a la transformada de $f(t)$, es decir: $F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$

y $U(\Omega)$ a la transformada de Fourier de $u(t)$: $U(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$

se obtiene:

$$\left(-\Omega^2 m + i\,\Omega\, c + k\right) U(\Omega) = F(\Omega)$$

o bien:

$$U(\Omega) = H(\Omega)\, F(\Omega)$$

donde $H(\Omega) = \left(-\Omega^2 m + i\,\Omega\, c + k\right)^{-1}$ es una *función de transferencia*. Luego se obtiene la función $u(t)$ con la transformada inversa:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega$$

Las mismas ideas pueden aplicarse a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Por ejemplo:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}' + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{c}\, f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\mathbf{A} + i\,\Omega\,\mathbf{B}\right) \mathbf{U}(\Omega) = \mathbf{c}\, F(\Omega)$$

En este caso $\mathbf{U}(\Omega)$ denota una matriz columna que agrupa las transformadas de las funciones agrupadas en $\mathbf{u}(t)$. Luego:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega$$

8.4 Algoritmo de Cooley y Tukey[2]

Las operaciones requeridas para obtener los coeficientes de Fourier:

$$c_j = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^{-\left(\frac{2\pi i}{N}\right) jn} \qquad (8.14)$$

son similares a las del proceso inverso:

$$f_n = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\, e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right) jn} \qquad (8.15)$$

[2] Cooley, J.W. y Tukey, J.W. An algorithm for machine calculation of complex Fourier series. *Math.Comp.*, 19:297-201, 1965.

Al realizar las operaciones como se indican en (8.14) y (8.15) se requerirían en cada caso N^2 multiplicaciones y sumas de números complejos. Con el algoritmo de Transformada de Fourier Rápida (FFT por sus iniciales en inglés) se requieren sólo $N \log_2 N$ multiplicaciones y sumas. Esto es suponiendo que N es una potencia de 2 y que el algoritmo se escribe en su forma más simple. Si, por ejemplo, $N = 2^{16} = 65536$, el algoritmo FFT resulta aproximadamente 4000 veces más rápido que el procedimiento "convencional" antes indicado.

Para empezar, puede observarse que, dejando de lado el factor $1/N$, las expresiones (8.14) y (8.15) son ambas de la forma:

$$c_j = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, u^{jn} \qquad u = e^{\pm\left(\frac{2\pi i}{N}\right)} \tag{8.16}$$

Nótese que $u^N = 1$. Los párrafos siguientes se refieren a (8.16), y son igualmente aplicables a la determinación de los c_j (análisis de Fourier) o a la de los f_n (síntesis de Fourier). Se presenta el algoritmo FFT en su forma más simple, suponiendo que N es una potencia exacta de 2, es decir, $N = 2^m$. Sin embargo, pueden aplicarse ideas similares cuando N es arbitrario.

Los valores f_n pueden separarse en dos grupos, aquellos que ocupan las posiciones pares: $n = 2p$ y aquellos que ocupan las posiciones impares: $n = 2p+1$. Luego:

$$c_j = \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2p} \, (u^2)^{jp} + u^j \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2p+1} \, (u^2)^{jp}$$

Por otro lado, expresando j como $\alpha N/2 + q$, donde $\alpha = 0,1$ y $0 < q < (N/2 - 1)$, se tiene que:

$$(u^2)^{jp} = (u^2)^{\frac{N}{2}\alpha p} (u^2)^{pq} = (u^N)^{\alpha p} (u^2)^{pq} = (u^2)^{pq}$$

$$u^{\frac{N}{2}+q} = u^{\frac{N}{2}} \, u^q = e^{\pm \pi i} \, u^q = -u^q$$

Dividiendo los c_j en dos grupos (para $\alpha = 0,1$) se obtienen:

$$c_q = \phi_q + u^q \, \varphi_q \tag{8.17a}$$

$$c_{\frac{N}{2}+q} = \phi_q + u^q \, \varphi_q \tag{8.17b}$$

siendo $\phi_q = \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2p} \, (u^2)^{pq}$ y $\varphi_q = \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2p+1} \, (u^2)^{pq}$ "transformadas" con $N/2$ puntos.

Nótese que $u^2 = e^{\pm\frac{2\pi i}{N/2}}$, expresión análoga a la de u pero con $N/2$ puntos.

Las ϕ_q y φ_q se pueden a su vez obtener dividiendo cada sumatoria en dos partes. Si $N = 2^m$, el mismo procedimiento puede sucesivamente repetirse hasta tener sumatorias con un solo punto.

En la tabla siguiente se muestran los sucesivos reagrupamientos de los valores f_n que se harían para el caso particular $N = 16$:

	1 FFT $N=16$	2 FFT $N=8$	4 FFT $N=4$	8 FFT $N=2$	16 FFT $N=1$	
0000	0	0	0	0	0	0000
0001	1	2	4	8	8	1000
0010	2	4	8	4	4	0100
0011	3	6	12	12	12	1100
0100	4	8	2	2	2	0010
0101	5	10	6	10	10	1010
0110	6	12	10	6	6	0110
0111	7	14	14	14	14	1110
1000	8	1	1	1	1	0001
1001	9	3	5	9	9	1001
1010	10	5	9	5	5	0101
1011	11	7	13	13	13	1101
1100	12	9	3	3	3	0011
1101	13	11	7	11	11	1011
1110	14	13	11	7	7	0111
1111	15	15	15	15	15	1111

Se indica además, a la izquierda, el número de orden original en un sistema de base 2. A la derecha se observa que, al reagrupar los valores de la función, cada uno de estos intercambia posición con aquel que corresponde a los bits en orden inverso.

La sucesiva subdivisión de los grupos en dos de la mitad de tamaño termina cuando $N=1$ y se tiene $e^{\pm 2\pi i}=1$; entonces los valores ϕ_q y φ_q resultan iguales a los de las correspondientes f_n. Luego se usan expresiones como la (8.17) para obtener $N/2$ FFT con dos puntos:

$$u=e^{\pm 2\pi i/2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_0 &= \phi_0+\varphi_0 \\ c_1 &= \phi_0-\varphi_0 \end{aligned}$$

Y luego $N/4$ FFT con cuatro puntos:

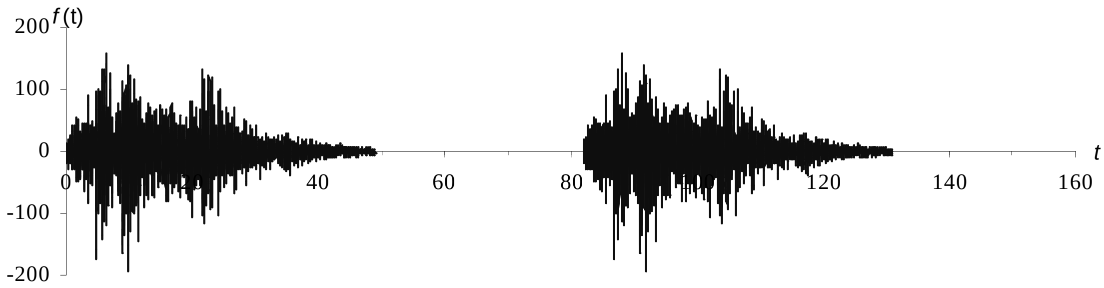
$$u=e^{\pm 2\pi i/4}=\pm i \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_0 &= \phi_0+\varphi_0 \\ c_2 &= \phi_0-\varphi_0 \\ c_1 &= \phi_1 \pm i\,\varphi_1 \\ c_3 &= \phi_1 \mp i\,\varphi_1 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente hasta combinar los resultados de 2 FFT con $N/2$ puntos para producir la FFT con N puntos.

8.5 *Algunas consideraciones prácticas*

Para una función no periódica, como podría ser el registro de una componente de aceleración sísmica, estrictamente no podría emplearse el algoritmo FFT, puesto que se obtienen los coeficientes de una serie de Fourier y no propiamente la transformada. Sin embargo, puede considerarse a la función como si fuera periódica agregándole suficientes ceros como para asegurar que, dada la disipación existente en todos los sistemas reales, no haya influencia significativa de un período sobre el siguiente.

En la figura se ilustra esta idea:



Un aspecto importante es definir a que frecuencia Ω_j corresponde cada uno de los coeficientes c_j. Siendo el período $T = N\,\Delta t$ se tiene $\Omega_1 = \Delta\Omega = 2\pi / T$ y por lo tanto $\Omega_j = 2\pi\, j/(N\,\Delta t)$.

La máxima frecuencia que se representa correctamente (denominada de Nyquist) depende del intervalo Δt al que se registra la función f y resulta $\Omega_{máx} = (2\pi/\Delta t)/2$. Las componentes a frecuencias más altas se interpretan como si correspondieran a frecuencias incorrectas (alias).